

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич

Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для классов
с углубленным и профильным
изучением математики

Под научной редакцией
А. Р. Рязановского

11
к л а с с

Допущено Министерством
образования Российской
Федерации

2-е издание, исправленное



дрофа

Москва - 2004

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6
П64

Потоскуев Е. В.
П64 Геометрия. 11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 2-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2004. — 368 с.: ил.

ISBN 5—7107—8310—2

Новый учебник по стереометрии для классов с углубленным и профильным изучением математики содержит как материал, необходимый для изучения в классе, так и дополнительные разделы, которые могут быть изучены на уроках за счет резервного времени, на математических кружках, послужить основой для докладов учащихся. В учебный комплект входит задачник тех же авторов, соответствующий содержанию учебника, а также задачи, которые встречались на вступительных экзаменах в технические вузы за последние годы.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6

Учебное издание

Потоскуев Евгений Викторович, Звавич Леонид Исаакович

ГЕОМЕТРИЯ. 11 класс

*Учебник для общеобразовательных учреждений
с углубленным и профильным изучением математики*

Зав. редакцией **Г. Н. Хромова**

Редактор **Г. Н. Хромова**

Художественный редактор **А. А. Абрамова**

Технические редакторы **М. В. Биденко, Н. И. Герасимова**

Компьютерная верстка **Т. В. Рыбина**

Корректоры **Г. И. Мосякина, Е. Е. Никулина**

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 01.03.04. Формат 60×90^{1/8}. Бумага типографская. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,4. Тираж 16 000 экз. Заказ № 5144 .

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцеский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа»

обращаться по адресу: 127018, Москва, Суцеский вал, 49.

Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.

Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Магазины «Переpletные птицы»:

127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1. Тел.: (095) 912-45-76;

140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,

ул. Октябрьской революции, 366/2. Тел.: (095) 741-59-76.

Отпечатано с готовых диапозитивов

в АО «Московские учебники и Картолитография».

125252, Москва, ул. Зорге, 15.

ISBN 5—7107—8310—2

© ООО «Дрофа», 2003

© ООО «Дрофа», 2004, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой учебник по стереометрии для 11 классов с углубленным и профильным изучением математики и является частью комплекта, в который кроме учебника входят задачник и книга для учителя.

Основная часть учебника соответствует программе курса геометрии для 11 классов с углубленным и профильным изучением математики. Примерное планирование учебного материала будет приведено в книге для учителя.

Программный материал изложен в первых трех главах учебника. Представленный в популярной форме дополнительный материал, изложенный в разделе «Дополнения», содержит сведения о развитии отдельных «ветвей» геометрии и предназначен для развития математического кругозора учащихся и для гуманизации процесса изучения математики и обучения математикой. Он может быть изучен как на занятиях в кружках, так и на уроках за счет резервного времени, либо послужит основой для докладов и исследовательских работ учащихся.

Помимо основного текста, содержащего теоретический материал курса геометрии, в книге имеются:

- дополнительный материал, обозначенный ...., в котором подробно рассматриваются некоторые вопросы, выходящие за рамки обязательного курса;

- список основных теорем курса стереометрии 11 класса;
- метрические формулы планиметрии и стереометрии.

Развивая концепцию, лежащую в основе курса стереометрии, авторы не ставили целью построение его на строго аксиоматической основе. О возможности такого построения можно прочитать в разделе «Дополнения».

Активное и эффективное изучение стереометрии возможно лишь при условии решения достаточно большого числа задач различной степени сложности. Поэтому теоретическому материалу каждого параграфа учебника соответствует набор задач в задачнике. Названия глав и параграфов задачника соответствуют их названиям в учебнике.

В книге для учителя будут помещены примерные контрольные работы. До опубликования книги для учителя материалы

для составления самостоятельных и контрольных работ можно брать как из задачника, так и из книги *Звавич Л. И., Чинкина М. В., Шляпочник Л. Я.* Геометрия. 8—11 классы: Дидактические материалы. — М.: Дрофа, 2000.

Учебный комплект может быть полезен для всех изучающих или повторяющих курс стереометрии. Его можно использовать на факультативах и спецкурсах, он пригодится и при подготовке к поступлению в вузы.

Авторы выражают огромную благодарность рецензентам учебника доктору педагогических наук, профессору МПГУ Ирине Михайловне Смирновой, кандидату педагогических наук, заслуженному учителю России, учителю школы № 420 г. Москвы Борису Петровичу Пигареву, учителю школы № 1741 г. Москвы Илье Евгеньевичу Феоктистову, а также учителю математики Потоскуевой Тамаре Николаевне за внимательное прочтение рукописи и сделанные ценные конструктивные замечания и предложения.

Авторы будут благодарны за все замечания, присланные по адресам:

Москва, 121096, а/я 534, Звавичу Л. И.;

445030, г. Тольятти Самарской области, Потоскуеву Е. В. (до востребования).

§ 1. Отображения пространства

Множество, элементами которого являются числа, называется *числовым* множеством. Аналогично, множество, элементами которого являются точки, называется *точечным множеством*. Примерами точечных множеств являются точка, отрезок, прямая, треугольник, куб, шар, плоскость, все пространство.

Пусть V и V' — различные точечные множества.

Говорят, что между множествами V и V' установлено *соответствие* g , если каждой точке M множества V сопоставляется некоторая точка M' множества V' (рис. 1). При этом пишут $M' = g(M)$ или $g(M) = M'$.

Дадим определения некоторым видам соответствий между двумя множествами.

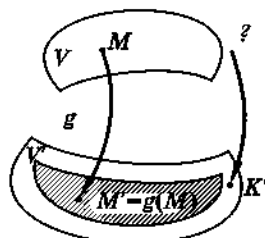


Рис. 1

Определение. Соответствие g между множествами V и V' , при котором каждой точке M множества V сопоставляется *единственная* точка M' множества V' , называется отображением множества V «в» множество V' .

Точка M' называется образом точки M при отображении g , а точка M — прообразом точки M' при том же отображении g . Записывают $g: V \xrightarrow{\text{«в»}} V'$.

Замечание. Отображение множества V «в» множество V' называют *инъективным* отображением или, короче, *инъекцией* множества V в множество V' , если образы любых двух различных точек множества V различны.

Если F — геометрическая фигура множества V ($F \subset V$), то фигура $F' \subset V'$, состоящая из образов всех точек фигуры F при отображении g , называется *образом фигуры F* при этом отображении.

Определение. Соответствие g между множествами V и V' , при котором каждая точка M' множества V' имеет по крайней мере один прообраз M во множестве V , называется **отображением множества V «на» множество V'** (рис. 2). При этом пишут $g: V \xrightarrow{\text{«на»}} V'$.

! Замечание. Отображение $V \xrightarrow{\text{«на»}} V'$ называют также **сюръективным отображением** или **сюръекцией** множества V на множество V' .

Сравнивая отображение $V \xrightarrow{\text{«в»}} V'$ и отображение $V \xrightarrow{\text{«на»}} V'$, замечаем, что:

а) как при отображении «в», так и при отображении «на» любая точка $M \in V$ имеет единственный образ $M' \in V'$;

б) при отображении «в» не исключено существование во множестве V' точек, которые *не имеют прообраза* в V (см. рис. 1), в то время как при отображении «на» не исключено существование в V' таких точек, которые *имеют в V более одного прообраза* (рис. 2).

Это означает, что $g(V) \subseteq V'$ при отображении «в» и $g(V) = V'$ при отображении «на».

Определение. Соответствие g между множествами V и V' , при котором *каждая* точка множества V имеет *единственный* образ в V' и *каждая* точка множества V' имеет *единственный* прообраз в V , называется **взаимно-однозначным (или биективным) отображением** множества V на множество V' (рис. 3).

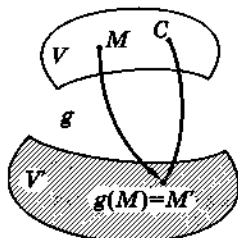


Рис. 2

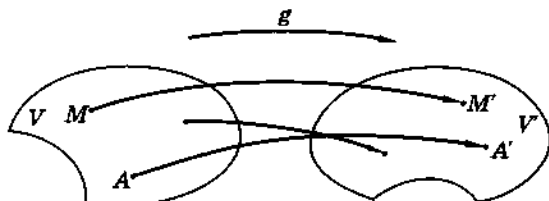


Рис. 3

Из этого определения следует: при биективном (взаимно-однозначном) отображении множества V на множество V' две любые различные точки множества V отображаются на две различные же точки множества V' (образы любых двух различных точек различны) и две любые различные точки множества V' являются образами двух различных точек множества V .

Фигура, которая при отображении g пространства отображается на себя, называется неподвижной фигурой этого отображения.

В качестве отображения одной фигуры на другую рассмотрим параллельное проектирование в пространстве.

На рисунке 4, а верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$ (множество V) куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ отображается на плоскость α (множество V'), пересечением которой с кубом является четырехугольник $EKHT$. Это отображение осуществляется параллельным проектированием в направлении боковых ребер куба.

Каждая точка квадрата $A_1B_1C_1D_1$ отображается (проектируется) на одну точку плоскости α (на точку четырехугольника $EKHT$), но ни одна точка плоскости α , не принадлежащая четырехугольнику $EKHT$, не имеет прообраза в квадрате $A_1B_1C_1D_1$.

Значит, данное отображение квадрата $A_1B_1C_1D_1$ на плоскость α является инъективным (отображением «в»).

На рисунке 4, б в качестве множества V принято объединение верхнего и нижнего оснований куба, а в качестве множества V' — четырехугольник $EKHT$. Отображение осуществляется также параллельным проектированием в направлении

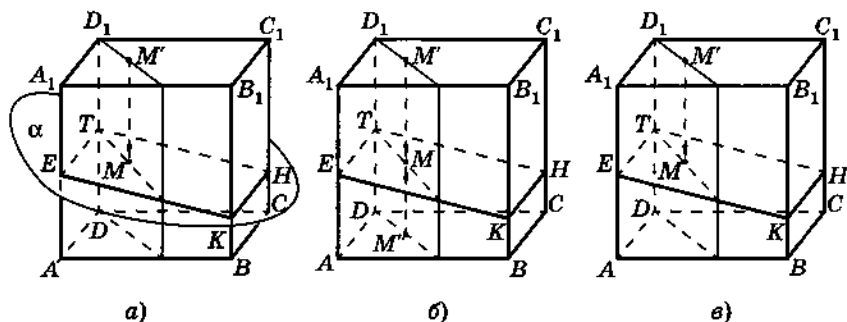


Рис. 4

боковых ребер куба. При этом проектировании на каждую точку четырехугольника $EKHT$ отображаются две точки, одна из которых принадлежит основанию $ABCD$ куба, другая — основанию $A_1B_1C_1D_1$. Это означает, что рассматриваемое отображение — отображение «на» (сюръекция).

Рисунок 4, в иллюстрирует отображение (параллельное проектирование) верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ (множества V) на четырехугольник $EKHT$ (множество V'). В данном случае имеем взаимно-однозначное (биективное) отображение квадрата $A_1B_1C_1D_1$ на четырехугольник $EKHT$.

Попробуйте придумать другие примеры отображений одного множества на другое.

§ 2. Преобразования пространства

2.1. Определение преобразования.

Центральная симметрия пространства

До сих пор мы рассматривали отображения одного множества на другое множество, отличное от первого. Однако представляют интерес взаимно-однозначные (биективные) отображения множества на себя.

Определение. Взаимно-однозначное отображение множества на себя называется преобразованием этого множества.

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразования пространства.

Определение. Биективное отображение пространства на себя называется преобразованием пространства.

Если преобразование пространства обозначить буквой g , то запись $g(A) = A'$ означает, что точке A пространства ставится в соответствие точка A' этого пространства. Точка A' называется *образом точки A* , а точка A — *прообразом точки A'* при данном преобразовании g .

Два преобразования g_1 и g_2 пространства называются *равными*, если образы любой точки пространства при этих

преобразованиях совпадают, т. е. для любой точки M имеет место

$$\left. \begin{aligned} g_1(M) &= M', \\ g_2(M) &= M' \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

Если F — некоторая фигура пространства, то запись $g(F) = F'$ означает, что образы всех точек фигуры F составляют фигуру F' ; фигура F' называется образом фигуры F при данном преобразовании g . Так, при преобразовании пространства образом всех точек пространства является само это пространство.

Точка A пространства, которая при преобразовании g отображается на себя ($g(A) = A$), называется *неподвижной точкой этого преобразования*.

Фигура F называется *неподвижной фигурой данного преобразования g* , если эта фигура преобразованием g отображается на себя, т. е. $g(F) = F$. Ясно, что любое множество неподвижных точек преобразования g является неподвижной фигурой при этом преобразовании, но обратное утверждение оказывается не всегда верным, т. е. среди точек неподвижной фигуры F преобразования g могут быть точки, сами по себе не являющиеся неподвижными точками этого преобразования g . Например, при любом преобразовании пространства само пространство может быть рассмотрено как неподвижная фигура, в то время как не всякая точка пространства при этом преобразовании отображается на себя.

В дальнейшем нас будет интересовать, прежде всего, наличие неподвижных прямых и неподвижных плоскостей при каждом из рассматриваемых преобразований пространства.

Рассмотрим одно из преобразований пространства.

Выберем произвольную точку O пространства. Точка M' называется *симметричной точке M относительно точки O* , если точка O делит отрезок MM' пополам (рис. 5). Точка O считается симметричной самой себе.

Зададим теперь следующее отображение пространства на себя: любой точке M пространства поставим в соответствие точку M' , симметричную ей относительно точки O .

Так как любой отрезок имеет единственную середину, то мы получаем взаимно-однозначное (биективное) ото-

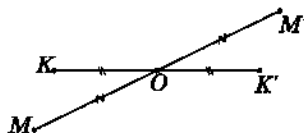


Рис. 5

бражение пространства на себя, т. е. преобразование пространства. При этом точка O отображается на себя (*является неподвижной точкой данного преобразования*).

Определение. Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно точки O , называется *центральной симметрией пространства относительно точки O* . При этом точка O отображается на себя и называется *центром симметрии*.

Будем обозначать центральную симметрию пространства с центром O символом Z_O . Если при этой симметрии точка M отображается на точку M' , то пишут: $Z_O(M) = M'$ или $M' = Z_O(M)$.

Из определения симметричных точек следует: если точка M' симметрична точке M относительно центра O , то точка M симметрична точке M' относительно того же центра O , т. е.

$$Z_O(M) = M' \Leftrightarrow Z_O(M') = M.$$

В этом случае говорят, что точки M и M' симметричны относительно центра O .

Центральная симметрия имеет только одну неподвижную точку — центр симметрии.

Еще одним примером преобразования пространства является его тождественное преобразование.

Определение. Преобразование пространства, которое каждую его точку отображает на себя, называется *тождественным преобразованием*.

Будем обозначать тождественное преобразование буквой E . При тождественном преобразовании пространства каждая его точка является неподвижной точкой, а каждая фигура — неподвижной фигурой.

Говорят, что преобразование пространства задано в координатах (задано формулами), если каждой точке $M(x; y; z)$ пространства ставится в соответствие точка $M'(x'; y'; z')$ такая, что

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, z), \\ y' = f_2(x, y, z), \\ z' = f_3(x, y, z). \end{cases}$$

Например, тождественное преобразование отображает каждую точку пространства на себя и задается формулами: $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; центральная симметрия с центром в начале координат — точке O — отображает любую точку $M(x; y; z)$ пространства на такую точку $M'(x'; y'; z')$, что векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ противоположны, поэтому центральная симметрия с центром в начале координат задается формулами:

$$x' = -x, y' = -y, z' = -z.$$

2.2. Обратное преобразование

Так как преобразование g пространства отображает любую точку M пространства на свой (единственный!) образ — точку M' , то, обратно, существует отображение, при котором точка M' отображается на свой (также единственный!) прообраз — точку M , и которое (в силу взаимной однозначности преобразования g) является взаимно-однозначным отображением пространства на себя, а значит, его преобразованием. Это преобразование называют *обратным для преобразования g* и обозначают g^{-1} .

Таким образом, для любого преобразования g существует обратное ему преобразование g^{-1} , причем:

$$g(M) = M' \Leftrightarrow g^{-1}(M') = M.$$

Ранее мы показали, что для центральной симметрии справедливо соотношение $Z_O(M) = M' \Rightarrow Z_O(M') = M$. Но точка M' отображается на свой прообраз — точку M — преобразованием, обратным данному, т. е. $Z_O^{-1}(M') = M$.

Получили: $Z_O(M') = M$, $Z_O^{-1}(M') = M$. На основании определения равенства двух преобразований приходим к выводу: *центральная симметрия пространства — это преобразование, совпадающее со своим обратным*. Таким образом, $Z_O^{-1} = Z_O$.

Фигуры F и F' , отображающиеся одна на другую при центральной симметрии относительно точки O , называются *центрально-симметричными относительно точки O* .

Фигура F называется *центрально-симметричной относительно точки O* , если каждая точка фигуры F при симметрии относительно точки O отображается на точку этой фигуры. Точка O называется *центром симметрии фигуры F* . Из этого определения следует, что центрально-сим-

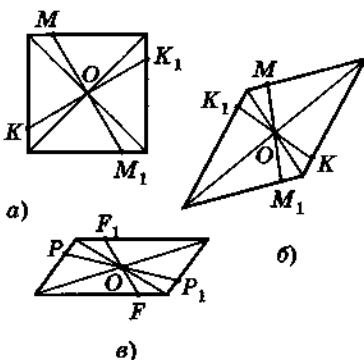


Рис. 6

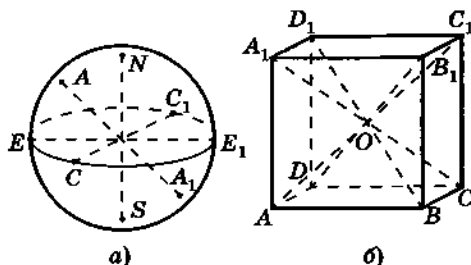


Рис. 7

метричная относительно точки O фигура F является неподвижной фигурой при симметрии относительно точки O , но сама фигура F имеет только одну неподвижную точку при данной симметрии — точку O .

Примерами плоских центрально-симметричных фигур могут служить отрезок, прямая, квадрат, ромб, параллелограмм (рис. 6, а, б, в). Примерами центрально-симметричных неплоских фигур являются сфера (рис. 7, а), куб (рис. 7, б), плоскость. У сферы один центр симметрии — центр сферы; центром симметрии куба является точка пересечения его диагоналей. Центром симметрии плоскости может служить любая ее точка. (Убедитесь самостоятельно, что правильный тетраэдр центра симметрии не имеет.)

2.3. Композиция преобразований

Для всяких двух преобразований g_1 и g_2 пространства можно построить третье преобразование g_3 следующим образом.

Если преобразование g_1 отображает точку M на точку M' ($g_1(M) = M'$), а преобразование g_2 — точку M' на точку $M'' = g_2(M') = g_2(g_1(M))$, то преобразование (почему?), при котором точка M отображается на точку M'' , называют **композицией преобразований g_1 и g_2** и обозначают символически $g_3 = g_2 \circ g_1$. Таким образом, получаем

$$g_1(M) = M', g_2(M') = M'' \Rightarrow g_3(M) = (g_2 \circ g_1)(M) = g_2(g_1(M)) = g_2(M') = M''.$$

При таком определении композиции $g_2 \circ g_1$ преобразований g_1 и g_2 сначала применяется преобразование g_1 («правое») и к его результату применяется преобразование g_2 .

Такая запись естественна, так как сущность понятия «геометрическое преобразование» в геометрии, по сути дела, та же, что и сущность понятия «функция числового аргумента» в алгебре: геометрическое преобразование можно рассматривать как своеобразную «геометрическую» функцию, областью определения и множеством значений которой являются точечные множества — геометрические фигуры. Тогда понятия «образ» и «прообраз» в геометрическом преобразовании становятся аналогами понятий соответственно «значение функции» и «значение аргумента» в теории функций. Поэтому запись $(g_2 \circ g_1)(M) = g_2(g_1(M))$ в теории геометрических преобразований аналогична записи $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ в теории функций. Иными словами, понятие «композиция преобразований» в курсе геометрии аналогично понятию «сложная функция» в курсе алгебры.

Следует заметить, что *композиция двух преобразований не обладает свойством коммутативности (переместительности)*, т. е. не для всяких преобразований g_1 и g_2 выполняется равенство $g_2 \circ g_1 = g_1 \circ g_2$.

 Докажем, что *композиция двух преобразований обладает свойством ассоциативности (сочетательности)*, т. е. для любых трех преобразований g_1, g_2, g_3 пространства имеет место равенство $(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$. Для этого достаточно убедиться, что в результате «действия» композиции преобразований $(g_3 \circ g_2) \circ g_1$ на любую точку M пространства и при «действии» на эту точку композиции преобразований $g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$ получается одна же точка пространства; иначе говоря, образы любой точки M пространства при преобразованиях $(g_3 \circ g_2) \circ g_1$ и $g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$ совпадают, т. е.

$$((g_3 \circ g_2) \circ g_1)(M) = (g_3 \circ (g_2 \circ g_1))(M).$$

Обозначим: $g_1(M) = M', g_2(M') = M'', g_3(M'') = P$. Тогда имеем: $((g_3 \circ g_2) \circ g_1)(M) = (g_3 \circ g_2)(g_1(M)) = (g_3 \circ g_2)(M') = g_3(g_2(M')) = g_3(M'') = P$; $(g_3 \circ (g_2 \circ g_1))(M) = g_3((g_2 \circ g_1)(M)) = g_3(g_2(g_1(M))) = g_3(g_2(M')) = g_3(M'') = P$.

Итак, $((g_3 \circ g_2) \circ g_1)(M) = (g_3 \circ (g_2 \circ g_1))(M) = P$, следовательно, на основании определения равенства двух преобразований

преобразования $(g_3 \circ g_2) \circ g_1$ и $g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$ равны, т. е. $(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$, что и требовалось доказать. ▼ 

Пусть g и g^{-1} взаимно-обратные преобразования пространства. Тогда для любой точки M справедливо соотношение $g(M) = M' \Rightarrow g^{-1}(M') = M$, откуда $(g^{-1} \circ g)(M) = g^{-1}(g(M)) = g^{-1}(M') = M$. Следовательно, композиция преобразования g и ему обратного преобразования g^{-1} любую точку пространства отображает на себя.

Но тождественное преобразование E также любую точку пространства отображает на себя. На основании определения равенства двух преобразований приходим к выводу: композиция любого преобразования и обратного ему преобразования есть тождественное преобразование, т. е.

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = E.$$

Так как центральная симметрия Z_O — преобразование, совпадающее со своим обратным преобразованием Z_O^{-1} , то $Z_O^{-1} \circ Z_O = Z_O^2 = E$, т. е. композиция двух центральных симметрий относительно одного и того же центра является тождественным преобразованием.

Рассмотрим композиции $g \circ E$ и $E \circ g$ преобразований, где g — произвольное преобразование пространства, E — тождественное преобразование. Пусть M — любая точка пространства, $M' = g(M)$. Тогда

$$\begin{aligned}(E \circ g)(M) &= E(g(M)) = E(M') = M', \\ (g \circ E)(M) &= g(E(M)) = g(M) = M'.\end{aligned}$$

Откуда следует, что $E \circ g = g \circ E$. Таким образом, композицией любого преобразования g пространства и тождественного преобразования является данное преобразование g .

§ 3. Движения пространства.

Общие свойства движений

3.1. Определение движения.

Композиция движений

В курсе планиметрии мы познакомились с движениями плоскости как с отображениями плоскости на себя, при которых сохраняются расстояния между точками. Движениями плоскости являются, например, центральная и осевая симметрии,

поворот плоскости вокруг данной точки на данный угол, параллельный перенос.

Теперь введем понятие движения пространства.

Определение. Преобразование пространства, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками, называется движением пространства.

Из этого определения следует, что если при движении g пространства две любые различные точки A и B отображаются на точки $A' = g(A)$ и $B' = g(B)$, то расстояние между точками A' и B' равно расстоянию между точками A и B : $|A'B'| = |AB|$.

Докажем с помощью координатного метода, что центральная симметрия пространства является движением. Для этого рассмотрим центральную симметрию с центром в начале O декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ (рис. 8). Если при этом $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — две любые точки пространства, то при симметрии относительно точки O их образами являются соответственно точки $A'(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B'(-x_2; -y_2; -z_2)$ (почему?).

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \\ |A'B'| &= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |AB|. \end{aligned}$$

Это означает, что *центральная симметрия пространства есть движение*.

Рассмотрим вопрос о композиции движений пространства. Имеет место

Теорема 1. Композиция двух движений пространства есть движение.

Доказательство. Пусть g_1, g_2 — движения пространства. Если при движении g_1 точки A и B отображаются на точки

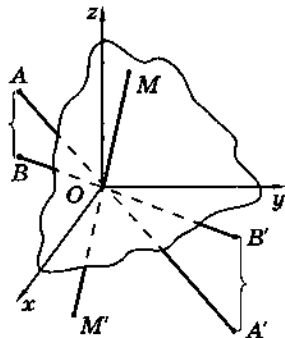


Рис. 8

$A_1 = g_1(A)$ и $B_1 = g_1(B)$, а при движении g_2 точки A_1 и B_1 отображаются на точки $A_2 = g_2(A_1)$ и $B_2 = g_2(B_1)$, то по определению движения $|A_1B_1| = |AB|$ и $|A_2B_2| = |A_1B_1|$. Тогда имеем

$$(g_2 \circ g_1)(A) = g_2(g_1(A)) = g_2(A_1) = A_2, \\ (g_2 \circ g_1)(B) = g_2(g_1(B)) = g_2(B_1) = B_2 \text{ и } |A_2B_2| = |AB|.$$

Это означает, что композиция $g_2 \circ g_1$ движений g_1 и g_2 сохраняет расстояние между точками, поэтому является движением, что и требовалось доказать. ▼

Докажите самостоятельно, что *тождественное преобразование и преобразование, обратное движению, также являются движениями*.

3.2. Общие свойства движений

Свойство сохранять расстояние между точками является определяющим свойством движений и лежит в основе изучения всех остальных свойств движений.

Лемма. При движении три точки, лежащие на одной прямой, отображаются на три точки, лежащие на одной прямой, причем точка, лежащая между двумя другими, отображается на точку, лежащую между образами двух других точек.

Доказательство. Из планиметрии известно, что три точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда одна из них, например точка B , лежит между двумя другими точками A и C (рис. 9), т. е. когда выполняется равенство

$$|AB| + |BC| = |AC|. \quad (1)$$

При движении g точки A, B и C отображаются на некоторые точки $A' = g(A)$, $B' = g(B)$ и $C' = g(C)$.

Так как при движении расстояния между точками сохраняются, то справедливы равенства $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$, $|A'C'| = |AC|$. На основании этих равенств и равенства (1) получаем равенство $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$, из которого следует, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, причем именно точка B' лежит между точками A' и C' . Лемма доказана. ▼

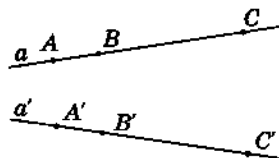


Рис. 9

Общие свойства движений пространства выражает

Теорема 2. Движение пространства отображает:

- а) отрезок на равный ему отрезок;
- б) прямую на прямую;
- в) луч на луч;
- г) треугольник на равный ему треугольник;
- д) плоскость на плоскость;
- е) полуплоскость на полуплоскость;
- ж) тетраэдр на равный ему тетраэдр;
- з) полупространство на полупространство.

Доказательство. Докажем некоторые из сформулированных в теореме предложений.

а) Пусть g — какое-либо движение пространства, AB — данный отрезок, точки A' и B' — образы концов A и B данного отрезка при движении g (рис. 10).

Из планиметрии известно, что отрезок AB — это множество всех точек, лежащих между его концами A и B .

Так как расстояние между точками при движении сохраняется, то длина отрезка AB равна длине отрезка $A'B'$.

Докажем, что каждая точка отрезка AB при движении g отображается на некоторую точку отрезка $A'B'$ и каждая точка отрезка $A'B'$ имеет своим прообразом при движении g некоторую точку отрезка AB .

По лемме при движении g любая точка отрезка AB (как точка, лежащая между A и B) отображается на некоторую единственную точку отрезка $A'B'$.

Обратно, пусть P' — произвольная точка отрезка $A'B'$, т. е. имеет место равенство $|A'P'| + |P'B'| = |A'B'|$. Так как движение g является преобразованием, то для точки P' существует единственная точка P — прообраз точки P' при движении g — такая, что выполняются равенства $|AP| = |A'P'|$, $|PB| = |P'B'|$. Тогда из равенства $|A'P'| + |P'B'| = |A'B'|$ с учетом $|AB| = |A'B'|$ получаем $|AP| + |PB| = |AB|$, откуда следует, что P — точка отрезка AB .

Таким образом, движение g биективно отображает отрезок AB на равный ему отрезок $A'B'$.

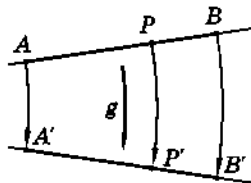


Рис. 10

б) Докажем, что *при движении пространства образом прямой является прямая*.

Пусть g — движение пространства, a — данная прямая.

Выберем на прямой a две любые различные точки A и C . При движении g точки A и C отображаются на некоторые точки соответственно A' и C' такие, что расстояния $|AC|$ и $|A'C'|$ равны.

Проведем через точки A' и C' прямую a' и докажем, что прямая a' — образ прямой a при движении g . Для этого достаточно доказать, что движение g биективно отображает прямую a на прямую a' .

Выберем на прямой a любую точку M . Если M — точка отрезка AC (рис. 11, а), то по доказанному выше свойству а) образом этой точки является некоторая точка M' отрезка $A'C'$, значит, точка прямой a' .

Если точка M прямой a лежит вне отрезка AC , то либо точка C лежит между A и M (рис. 11, б), либо A лежит между M и C (рис. 11, в).

Рассмотрим случай, когда точка C лежит между точками A и M . В этом случае имеем $|AC| + |CM| = |AM|$. Так как g — движение, то для точек A' , C' и $M' = g(M)$ справедливы равенства $|A'C'| = |AC|$, $|C'M'| = |CM|$, $|A'M'| = |AM|$. Следовательно, выполняется равенство $|A'C'| + |C'M'| = |A'M'|$, откуда следует, что точка C' лежит между точками A' и M' . Это означает, что точка M' лежит на прямой $a' = A'C'$. Таким образом, любая точка прямой a при движении g отображается на точку прямой a' .

Аналогично доказывается, что точка $M' = g(M)$ принадлежит прямой a' и в том случае, когда точка M расположена на прямой a так, что точка A лежит между точками M и C (см. рис. 11, в).

Таким образом, движение g любую точку M прямой a отображает на некоторую точку M' прямой a' .

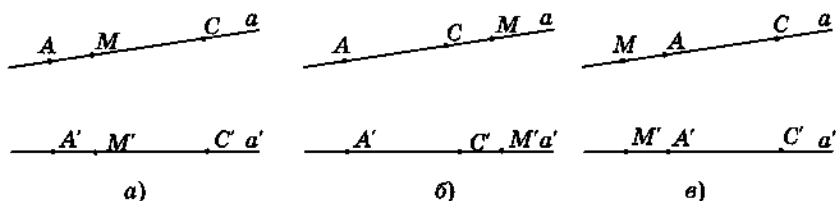


Рис. 11

Можно доказать, что всякая точка M' прямой a' является образом некоторой точки прямой a при движении g .

Исходя из сказанного выше, приходим к выводу: *движение g прямую a отображает на прямую a' .*

г) Докажем, что *движение отображает треугольник на равный ему треугольник.*

Треугольник ABC представляет собой объединение отрезков BM , где M — точка отрезка AC : когда точка M «пробежит» отрезок AC , отрезок BM «заметет» треугольник ABC (рис. 12).

При движении g точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, отображаются на такие три также не лежащие на одной прямой точки A', B', C' , что выполняются условия $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$, $|C'A'| = |CA|$, т. е. точки A', B', C' являются вершинами треугольника, стороны которого равны сторонам данного треугольника ABC . При этом когда точка M «пробежит» отрезок AC , ее образ — точка M' — «пробежит» равный ему отрезок $A'C'$, а отрезок $B'M'$ «заметет» внутренность треугольника $A'B'C'$, равного треугольнику ABC (величины углов треугольника ABC при движении сохраняются, так как по теореме косинусов они выражаются через сохранившиеся длины сторон).

д) Докажем, что *движение g плоскость отображает на плоскость.*

Выберем в данной плоскости α три любые точки A, E, C , не лежащие на одной прямой. При движении g эти точки отображаются на некоторые точки соответственно A', E', C' , также не лежащие на одной прямой (рис. 13). Проведем через них плоскость (она единственна).

Обозначим эту плоскость α' и докажем, что она является образом плоскости α при движении g .

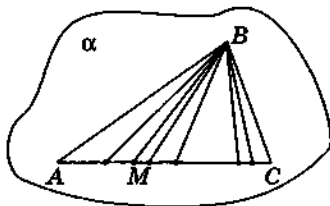


Рис. 12

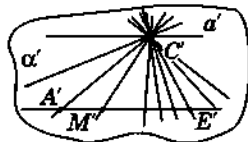
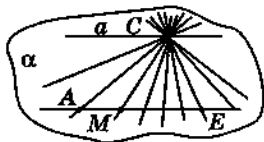


Рис. 13

Действительно, плоскость α является объединением всех прямых пучка с центром C^1 . Этот пучок образован прямой a , параллельной прямой AE , и всеми прямыми CM , где M — любая точка прямой AE .

При движении g прямая a отображается на прямую, проходящую через точку C' параллельно прямой $A'E'$. Обозначим эту прямую a' .

Когда точка M «пробежит» прямую AE , прямые CM (в объединении с прямой a) «заметут» всю плоскость α , точка M' — образ точки M при движении g — «пробежит» прямую $A'E'$, а прямые $C'M' = g(CM)$ (в объединении с прямой a') «заметут» всю плоскость α' .

Так как каждая прямая пучка с центром C отображается движением g на свой образ — прямую пучка с центром C' — биективно, то плоскость α' является образом плоскости α при движении g , что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что *при движении луч отображается на луч, полуплоскость — на полуплоскость, полупространство — на полупространство*.

ж) Докажем, что *тетраэдр движением g отображается на равный ему тетраэдр*.

Тетраэдр $PABC$ представляет собой объединение всех отрезков PM с концами M в треугольнике ABC (рис. 14).

При движении g вершины тетраэдра $PABC$ отобразятся на некоторые точки $P' = g(P)$, $A' = g(A)$, $B' = g(B)$, $C' = g(C)$, не лежащие в одной плоскости, причем выполняются равенства длин отрезков $|A'B'| = |AB|$, $|B'C'| = |BC|$, $|C'A'| = |CA|$, $|P'A'| = |PA|$, $|P'B'| = |PB|$, $|P'C'| = |PC|$, т. е. точки P', A', B', C' являются вершинами тетраэдра, ребра которого равны соответствен-

но ребрам данного тетраэдра $PABC$. Когда точка M «заметет» треугольник ABC , отрезок PM «заметет» тетраэдр $PABC$, при этом точка M' — образ точки M при движении g — «заметет» треугольник $A'B'C'$, а отрезок $P'M' = g(PM)$ «заметет» тетраэдр $P'A'B'C'$, равный тетраэдру $PABC$. Так как отрезок PM отображается движением g на свой образ — отрезок $P'M'$ — биек-

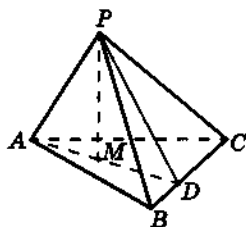


Рис. 14

¹ Пучком прямых с центром C называют множество всех прямых плоскости, проходящих через точку C .

тивно, то тетраэдр $PABC$ движением g отображается на равный ему тетраэдр $P'A'B'C'$, что и требовалось доказать. ▼

Вы можете сами открыть для себя и попробовать доказать различные свойства движений. Например:

- образами двух параллельных прямых являются две параллельные прямые;
- образами двух параллельных плоскостей являются две параллельные плоскости;
- перпендикулярные прямые отображаются на перпендикулярные прямые;
- прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную образу этой плоскости;
- двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол;
- если на прямой есть две точки, неподвижные при данном движении, то и каждая точка данной прямой — неподвижная при этом движении;
- если на плоскости есть три не лежащие на одной прямой точки, неподвижные при данном движении, то и каждая точка данной плоскости — неподвижная при этом движении;
- если имеются четыре не лежащие в одной плоскости точки, неподвижные при данном движении, то это движение является тождественным преобразованием пространства;
- если объединение двух пересекающихся прямых является неподвижной фигурой движения, то и вся определяемая ими плоскость неподвижна при этом движении, а общая точка данных прямых есть неподвижная точка данного движения;
- любое движение g пространства отображает ортонормированный базис с базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ на ортонормированный базис с базисными векторами $\vec{i}' = g(\vec{i}), \vec{j}' = g(\vec{j}), \vec{k}' = g(\vec{k})$;
- любое движение g пространства может быть задано двумя ортонормированными базисами $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$;
- если O, A, B, C — четыре точки, не лежащие в одной плоскости, и O', A', B', C' — такие четыре точки, что $OA = O'A', OB = O'B', OC = O'C', AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$, то существует, и притом только одно, движение пространства,

отображающее точки O, A, B, C , соответственно в точки O', A', B', C' , т. е. отображающее тетраэдр $OABC$ на равный ему тетраэдр $O'A'B'C'$.

3.3. О движениях первого и второго рода в пространстве

В пространстве, как и на плоскости, особое место занимает понятие «ориентация». Рассмотрим три некопланарных единичных вектора $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ и соответствующий им тетраэдр $OABC$. Если из точки C «посмотреть» на плоскость OAB и при этом кратчайший поворот от точки A к точке B вокруг точки O в плоскости OAB осуществляется против часовой стрелки, то эту упорядоченную тройку векторов называют *правой* (рис. 15, а), а если этот поворот осуществляется по часовой стрелке, то данную упорядоченную тройку векторов называют *левой* (рис. 15, б).

«Моделью» правой тройки векторов («правостороннего тетраэдра») могут служить три пальца (большой, указательный и средний) правой руки, взятые в указанном порядке; те же пальцы левой руки в указанном порядке — «модель» левой тройки векторов («левостороннего тетраэдра»). Заметим, что если тетраэдр, заданный тройкой векторов $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $\vec{OC}$, имеет правостороннюю ориентацию, то тетраэдр, заданный тройкой векторов $\vec{OA}, \vec{OB}$ и $-\vec{OC}$ имеет левостороннюю ориентацию (рис. 15, в), и наоборот.

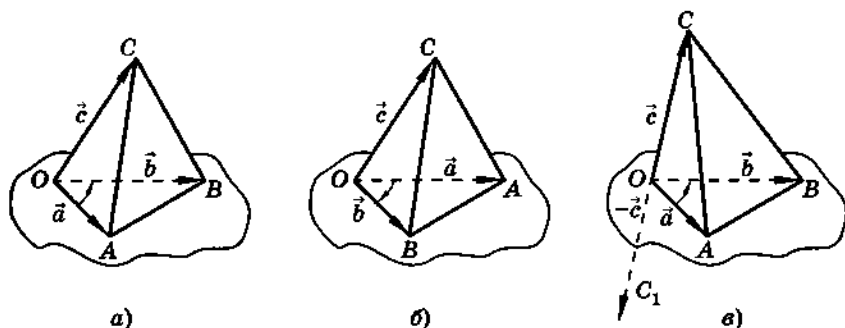


Рис. 15

Мы уже показали, что образом тетраэдра $OABC$ при движении является равный ему тетраэдр $O_1A_1B_1C_1$. При этом важным свойством любого движения является то, что это движение или меняет ориентацию каждого тетраэдра, или ориентация каждого тетраэдра при данном движении остается неизменной.

Движение пространства, при котором ориентация тетраэдра сохраняется, называется *движением первого рода*; движение пространства, меняющее ориентацию тетраэдра, называется *движением второго рода*. Например, тождественное преобразование является движением первого рода, а центральная симметрия пространства — движением второго рода. Действительно, при центральной симметрии относительно точки O векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ отображаются на противоположные им векторы $(-\vec{OA})$, $(-\vec{OB})$ и $(-\vec{OC})$, следовательно, ориентация тетраэдра $OABC$ изменяется трижды, т. е. меняется.

3.4. О равенстве фигур в пространстве

Вопрос о равенстве фигур в пространстве можно рассматривать, с точки зрения движений, если ввести следующее

Определение. Фигура F_2 называется равной фигуре F_1 , если существует движение пространства, отображающее фигуру F_1 на фигуру F_2 .

При этом пишут: $F_2 = F_1$.

На основании этого определения не требуется применять признаки равенства фигур для того, чтобы выяснить, равны ли эти фигуры: становится достаточным найти хотя бы одно движение пространства, отображающее одну из данных фигур на другую, тогда по определению они считаются равными.

Рассмотрим свойства отношения «равенства фигур».

1. Если фигура F_2 равна фигуре F_1 , то существует движение g , которое фигуру F_1 отображает на F_2 . Тогда преобразование g^{-1} , обратное для g , отображает F_2 на F_1 . Но преобразование, обратное движению, есть движение. Значит, g^{-1} — движение, отображающее F_2 на F_1 . По определению равенства двух фигур фигура F_1 равна фигуре F_2 .

Таким образом, получаем: если фигура F_2 равна фигуре F_1 , то фигура F_1 равна фигуре F_2 , т. е. $F_2 = F_1 \Rightarrow F_1 = F_2$. В этом случае говорят, что *равенство фигур обладает свойством симметричности*. Значит,

$$F_2 = F_1 \Leftrightarrow F_1 = F_2.$$

2. Пусть фигура F_1 равна фигуре F , а фигура F_2 равна фигуре F_1 . Это означает, что существуют такие движения g_1 и g_2 , что $g_1(F) = F_1$ и $g_2(F_1) = F_2$. Тогда $(g_2 \circ g_1)(F) = g_2(g_1(F)) = g_2(F_1) = F_2$, т. е. композиция движений $g_2 \circ g_1$ отображает фигуру F на F_2 . Но композиция движений есть движение, поэтому преобразование $g_2 \circ g_1$ — движение. Значит, фигура F_2 равна фигуре F . Таким образом, получаем

$$F_2 = F_1, F_1 = F \Rightarrow F_2 = F$$

или на основании $F_2 = F_1 \Leftrightarrow F_1 = F_2$ имеем:

$$F = F_1, F_1 = F_2 \Rightarrow F = F_2.$$

Это свойство называется *транзитивностью равенства фигур*.

3. Тожественное преобразование пространства также является движением, поэтому всякая фигура равна самой себе: $F = F$.

Это свойство называется *свойством рефлексивности равенства фигур*.

Таким образом, для любых фигур F, F_1, F_2 имеем:

$F = F$ (*рефлексивность равенства фигур*);

$F_1 = F_2 \Rightarrow F_2 = F_1$ (*симметричность равенства фигур*);

$F = F_1, F_1 = F_2 \Rightarrow F = F_2$ (*транзитивность равенства фигур*).

Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности равенства фигур позволяют разбить множество всех фигур пространства на подмножества — попарно непересекающиеся классы равных между собой фигур: каждый класс представляет собой множество всех равных друг другу фигур пространства.

Замечательным является тот факт, что все фигуры одного класса обладают одними и теми же геометрическими свойствами (иногда говорят, что *равные фигуры геометрически «одинаково устроены»*). Для изучения геометрических свойств фигур какого-либо класса достаточно изучить свойства произвольно выбранной фигуры данного класса — такими же свойствами обладают все остальные фигуры этого класса.

Так, для изучения геометрических свойств кубов с ребром, равным 2, каждый из нас вычерчивает один куб с таким ребром и производит нужные исследования. Затем мы сравниваем полученные результаты. Ответы на поставленные вопросы совпадают. Почему? Потому что все кубы с ребром 2 равны, при движении совпадают, значит, обладают одними и теми же геометрическими свойствами.

3.5. Свойства центральной симметрии пространства

В п. 3.1 мы показали, что центральная симметрия пространства есть движение. Значит, центральная симметрия обладает общими свойствами движений и отображает отрезок на равный ему отрезок, прямую — на прямую, плоскость — на плоскость, любую фигуру — на равную ей фигуру и т. п.

Рассмотрим взаимное положение фигуры и ее образа при центральной симметрии. Имеет место

Теорема 3. При центральной симметрии пространства:

1. а) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя;
- б) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую;
2. а) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя;
- б) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость.

Доказательство. 1. а) Если прямая s проходит через центр O симметрии (рис. 16), то, как следует из определения центральной симметрии, всякая точка M прямой s отображается на такую точку $M' = Z_O(M)$, что точки O , M и M' лежат на одной прямой, т. е. на прямой s . Значит, $Z_O(s) = s$, т. е. прямая, проходящая через центр симметрии, является неподвижной прямой этой центральной симметрии.

б) Если прямая a не проходит через центр O симметрии (рис. 16), то, являясь движением, симметрия Z_O прямую a отображает на некоторую прямую a' . Пусть A и B — произвольные точки прямой a , тогда точки $A' = Z_O(A)$ и $B' = Z_O(B)$ принадлежат прямой $a' = Z_O(a)$. Кроме того, $\angle A'OB' =$

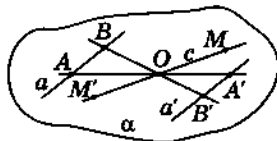


Рис. 16

$= \angle AOB$ (как вертикальные). Поэтому $\triangle AOB = \triangle A'OB'$, значит, $\angle ABO = \angle A'B'O$, откуда $AB \parallel A'B'$ (по признаку параллельности прямых), т. е. $a' \parallel a$.

Заметим при этом, что $|AB| = |A'B'|$, т. е. *центральная симметрия отрезок AB отображает на равный и параллельный ему отрезок $A'B'$* .

2. Центральная симметрия пространства — движение, значит, эта симметрия отображает любую плоскость α на некоторую плоскость α' .

Докажем, что α' или совпадает с α , или $\alpha' \parallel \alpha$, применив координатный метод. Для этого прямоугольную систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы ее начало O совпадало с центром симметрии (рис. 17).

а) Если плоскость α проходит через центр симметрии O — начало координат, то ее уравнение имеет вид $Ax + By + Cz = 0$. Это уравнение посредством формул симметрии с центром в начале координат преобразуется в уравнение $-Ax - By - Cz = 0$, которое совпадает с уравнением $Ax + By + Cz = 0$ данной плоскости α . Это означает, что плоскость α отображается на себя, т. е. плоскость, проходящая через центр симметрии, является неподвижной плоскостью этой центральной симметрии.

б) Если плоскость α не проходит через центр симметрии O — начало координат, то она задается уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (D \neq 0). \quad (1)$$

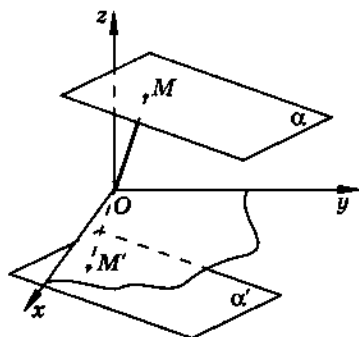


Рис. 17

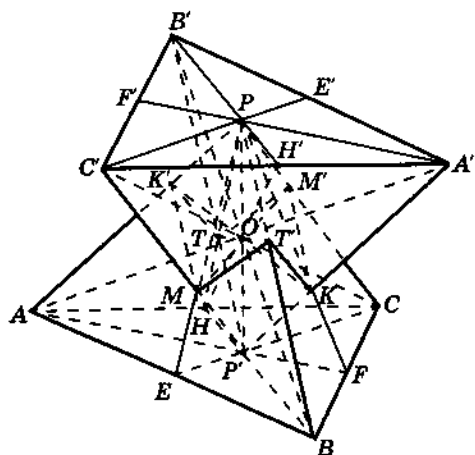


Рис. 18

Пусть $M(x; y; z)$ — любая точка плоскости α , $M'(-x; -y; -z)$ — симметричная ей точка относительно центра O .

Тогда множество точек M , координаты x, y, z которых удовлетворяют уравнению (1), отображается на такое множество точек M' , координаты $-x, -y, -z$, которых удовлетворяют уравнению $A(-x) + B(-y) + C(-z) + D = 0$ (получается из уравнения (1)) или уравнению $Ax + By + Cz - D = 0$.

Уравнение $Ax + By + Cz - D = 0$ является уравнением плоскости α' . Так как коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях плоскостей α и α' равны, а свободные члены (D и $-D$) различны, то плоскости α и α' параллельны: $\alpha' \parallel \alpha$. Теорема доказана. ▽

! Замечание. Утверждение о том, что плоскость α , проходящая через центр симметрии O , является неподвижной плоскостью этой центральной симметрии, можно доказать, если учесть, что образом любой точки M плоскости α является точка M' прямой OM , лежащей в этой плоскости.

■ ЗАДАЧА (1.035). $PABC$ — правильный тетраэдр. а) Постройте тетраэдр, центрально-симметричный данному тетраэдру, если центром симметрии является середина O его высоты, проведенной из вершины P . б) Постройте объединение и пересечение данного и построенного тетраэдров.

Решение. а) Для построения образа тетраэдра $PACB$ при симметрии относительно точки O достаточно построить образы его вершин при этой симметрии.

Пусть $A' = Z_O(A)$, $B' = Z_O(B)$, $C' = Z_O(C)$, $P' = Z_O(P)$ (рис. 18).

Соединив попарно полученные точки отрезками прямых, получаем искомый тетраэдр $P'A'B'C' = Z_O(PABC)$. При этом для боковых ребер тетраэдров справедливо

$$\begin{aligned} Z_O(PA) = P'A' &\Leftrightarrow Z_O(P'A') = PA, \\ Z_O(PB) = P'B' &\Leftrightarrow Z_O(P'B') = PB, \\ Z_O(PC) = P'C' &\Leftrightarrow Z_O(P'C') = PC. \end{aligned} \quad (1)$$

Для боковых граней тетраэдров имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} Z_O(\triangle ABP) = \triangle A'B'P' &\Leftrightarrow Z_O(\triangle A'B'P') = \triangle ABP, \\ Z_O(\triangle BCP) = \triangle B'C'P' &\Leftrightarrow Z_O(\triangle B'C'P') = \triangle BCP, \\ Z_O(\triangle ACP) = \triangle A'C'P' &\Leftrightarrow Z_O(\triangle A'C'P') = \triangle ACP. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что точка P' , симметричная точке P относительно центра O , является центроидом треугольника ABC , а точка P — центроидом треугольника $A'B'C'$.

б) Тетраэдры $PABC$ и $P'A'B'C'$ пересекаются, поэтому необходимо правильно выделить и изобразить их видимые и невидимые элементы. Начнем с построения границы пересечения тетраэдров. Рассмотрим вопрос о построении точек пересечения ребер одного из тетраэдров с гранями другого. Построим, например, точку пересечения ребра $P'C'$ тетраэдра $P'A'B'C'$ с гранью ABP тетраэдра $PABC$.

Пусть точка E — середина ребра AB (см. рис. 18). Так как при центральной симметрии прямая отображается на параллельную ей прямую, а $P'C' = Z_O(PC)$, то $P'C' \parallel PC$ и отрезок $P'C'$ лежит в плоскости, проходящей через O и PC , значит, в плоскости CPE . Поэтому $P'C'$ пересекает отрезок PE . Обозначим $M = P'C' \cap PE$. M есть искомая точка пересечения: $M = P'C' \cap (ABP)$.

Учитывая, что при любом преобразовании пересечение фигур отображается на пересечение их образов, а также принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} Z_O(P'C') = PC &\Leftrightarrow Z_O(\dot{P}C) = P'C', \\ Z_O(\triangle ABP) = \triangle A'B'P' &\Leftrightarrow Z_O(\triangle A'B'P') = \triangle ABP, \end{aligned}$$

приходим к выводу: точка M должна быть симметричной точке пересечения ребра PC с гранью $A'B'P'$. Поэтому для построения точки пересечения ребра PC с гранью $A'B'P'$ строим точку $M' = Z_O(M)$.

Таким образом, $Z_O(M) = M' = PC \cap (A'B'P')$.

Далее поступаем аналогично. Строим точки:

1. $K = P'A' \cap PF = P'A' \cap (BCP)$, где F — середина отрезка BC .
2. $K' = Z_O(K)$, $K' = PA \cap (B'C'P')$.
3. $T = P'B' \cap PH = P'B' \cap (ACP)$, где H — середина отрезка AC .
4. $T' = Z_O(T)$, $T' = PB \cap (A'C'P')$.

Пространственная ломаная $MT'KM'TK'M$ — искомая граница пересечения тетраэдров.

Тогда многогранник $ABCM'TK'MT'KA'B'C'$ — объединение тетраэдров, а многогранник $PM'TK'MT'KP'$ — пересечение тетраэдров.

! **Замечание.** В дальнейшем, изучая то или иное преобразование пространства, на самом деле являющееся движением, мы будем исследовать такие вопросы:

- как задается данное преобразование в координатах;
- действительно ли данное преобразование является движением (в нашем учебнике мы будем такое исследование проводить, как правило, в координатной форме; но это можно сделать и иначе);
- имеет ли данное движение неподвижные точки, неподвижные прямые, неподвижные плоскости;
- меняет ли это движение ориентацию тетраэдра.

Если данное движение имеет неподвижные прямые или неподвижные плоскости, то интересно узнать, какие движения возникают (*индуцируются данным движением*) на этих неподвижных прямых и неподвижных плоскостях.

Например, центральная симметрия Z_O пространства индуцирует на каждой из своих неподвижных прямых и неподвижных плоскостей также центральную симметрию относительно одного и того же центра O .

В процессе изучения различных движений мы будем рассматривать некоторые их композиции.

§ 4. Симметрия относительно плоскости

4.1. Определение симметрии относительно плоскости

Определение. Точка M' пространства, не лежащая на плоскости α , называется симметричной точке M относительно плоскости α , если отрезок MM' перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам. Любая точка плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости (рис. 19).

Из определения следует, что если точка M' симметрична точке M относительно плоскости α , то точка M симметрична точке M' относительно той же плоскости α .

Зададим теперь следующее отображение пространства на себя. Каждой точке

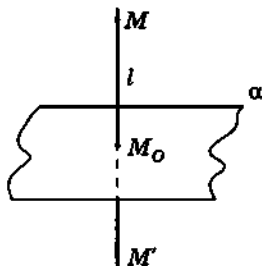


Рис. 19

M пространства поставим в соответствие точку M' , симметричную ей относительно плоскости α . Аналогично центральной симметрии, можно доказать, что это отображение является преобразованием пространства. При этом каждая точка плоскости α отображается на себя.

Определение. Преобразование пространства, при котором каждая точка пространства отображается на точку, симметричную ей относительно плоскости α , называется симметрией пространства относительно плоскости α . Плоскость α называется плоскостью симметрии.

Симметрия относительно плоскости α обозначается S_α . Если при этой симметрии точка M (фигура F) отображается на точку M' (фигуру F'), то записывают $S_\alpha(M) = M'$ ($S_\alpha(F) = F'$). Это преобразование еще называют «отражением в плоскости» или «зеркальной симметрией», или «зеркальным отражением от плоскости» проводя аналогию с «отражением в зеркале».

Из определения симметричных точек относительно плоскости α следует

$$S_\alpha(M) = M' \Leftrightarrow S_\alpha(M') = M.$$

Поэтому говорят, что точки M и M' симметричны относительно плоскости α . С другой стороны, ранее было показано, что точка M' отображается на свой прообраз — точку M — преобразованием, обратным данному. Значит,

$$S_\alpha(M) = M' \Rightarrow S_\alpha^{-1}(M') = M.$$

Получили

$$\left. \begin{array}{l} S_\alpha(M') = M, \\ S_\alpha^{-1}(M') = M \end{array} \right\} \Rightarrow S_\alpha^{-1} = S_\alpha.$$

Таким образом, симметрия относительно плоскости есть преобразование пространства, совпадающее со своим обратным преобразованием.

Тогда, для любой точки M пространства имеем

$$(S_\alpha \circ S_\alpha)(M) = S_\alpha(S_\alpha(M)) = S_\alpha(M') = S_\alpha^{-1}(M') = M.$$

Но для тождественного преобразования E справедливо $E(M) = M$. Так как точка M — любая, то преобразования $S_\alpha \circ S_\alpha$ и E равны: $S_\alpha \circ S_\alpha = E$, т. е. композиция двух симметрий относительно одной и той же плоскости есть тождественное преобразование.

Если при симметрии относительно плоскости α фигура F отображается на себя ($S_\alpha(F) = F$), то плоскость α называется плос-

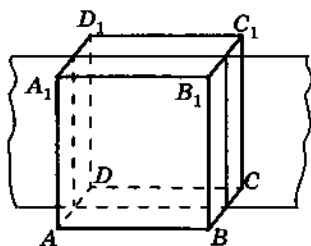


Рис. 20

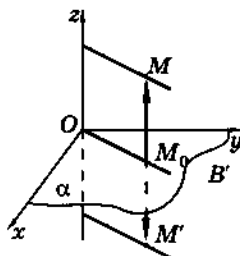


Рис. 21

костью симметрии этой фигуры. При этом говорят, что фигура F **симметрична относительно плоскости α** (или **плоскость α является плоскостью симметрии фигуры F**).

Например, плоскость, проходящая через середины параллельных ребер AD , BC , B_1C_1 и A_1D_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 20), является плоскостью симметрии этого куба. Докажите это и найдите другие плоскости симметрии данного куба.

Симметрия относительно плоскости может быть задана парой соответственных (симметричных) точек A и A' (почему?).

4.2. Симметрия относительно плоскости в координатной форме

Выведем формулы, которые позволяли бы по координатам произвольной точки M пространства находить координаты ее образа — точки $M' = S_\alpha(M)$.

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ее координатная плоскость Oxy совпадала с плоскостью симметрии α . Рассмотрим в этой системе координат произвольную точку $M(x; y; z)$ и ее образ $M'(x'; y'; z')$ при симметрии относительно плоскости Oxy (рис. 21).

По определению симметрии относительно плоскости имеем $MM' \perp (Oxy)$, $|M_0M| = |M_0M'|$, где M_0 — точка пересечения прямой MM' с плоскостью Oxy . Это означает, что точки M и M' расположены в разных полупространствах относительно плоскости Oxy , одинаково удалены от нее, а прямая MM' параллельна координатной оси Oz . Поэтому координаты этих точек связаны соотношениями

$$x' = x, y' = y, z' = -z, \quad (*)$$

которые называются **формулами преобразования симметрии относительно плоскости Oxy** .

4.3. Симметрия относительно плоскости — движение пространства

Используя формулы симметрии в координатах, докажем, что симметрия относительно плоскости — движение пространства.

Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$, $C(x_2; y_2; z_2)$ — данные точки, тогда $A'(x_1; y_1; -z_1)$, $C'(x_2; y_2; -z_2)$ — их образы при симметрии $S_{(Oxy)}$.

Находим:

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}; \\ |A'C'| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |AC|, \end{aligned}$$

т. е. рассматриваемая симметрия является движением, что и требовалось доказать. ▽

4.4. Свойства симметрии относительно плоскости

Рассмотрим вопрос о неподвижных точках, неподвижных прямых и неподвижных плоскостях зеркальной симметрии.

Неподвижной точкой симметрии относительно плоскости α является каждая точка плоскости α ; других неподвижных точек при данной симметрии нет.

Неподвижные прямые симметрии S_α относительно плоскости α можно разделить на два вида:

- каждая прямая плоскости α ; любая точка такой прямой является неподвижной точкой симметрии S_α , а симметрия S_α индуцирует на каждой из этих прямых тождественное преобразование E ;
- каждая прямая пространства, перпендикулярная плоскости α ; на любой такой прямой индуцируется центральная симметрия относительно точки пересечения этой прямой с плоскостью α .

Неподвижные плоскости симметрии S_α можно разделить также на два вида:

- сама плоскость α ; каждая ее точка является неподвижной точкой симметрии S_α , а симметрия S_α индуцирует на этой плоскости тождественное преобразование E ;

— каждая плоскость, перпендикулярная плоскости α ; на любой такой плоскости индуцируется известная вам из планиметрии осевая симметрия относительно прямой пересечения этой плоскости с плоскостью α .

Для исследования вопроса о том, меняет ли симметрия относительно плоскости ориентацию тетраэдра, выберем такую тройку единичных попарно взаимно перпендикулярных векторов $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$, чтобы точки O , A и B лежали в плоскости α . Тогда при симметрии S_α тетраэдр $OABC$ отобразится на такой тетраэдр $OABC'$, что $\vec{OC'} = -\vec{OC}$ (рис. 22). Это означает, что ориентации тетраэдров $OABC$ и $OABC' = S_\alpha(OABC)$ различны, т. е. симметрия относительно плоскости *меняет ориентацию тетраэдра*, следовательно, является движением второго рода.

Интересно заметить, что если три плоскости α , β и γ попарно взаимно перпендикулярны, то композиция симметрий относительно этих трех плоскостей является центральной симметрией относительно их общей точки (точки пересечения плоскостей α , β и γ), т. е. $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = Z_O$, где O — общая точка этих трех плоскостей. Попробуйте самостоятельно доказать это координатным методом.

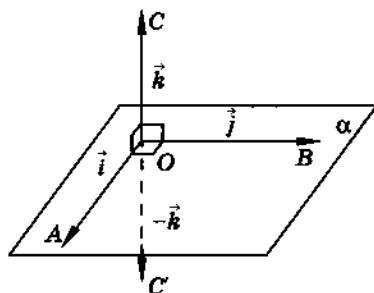


Рис. 22

§ 5. Параллельный перенос. Скользкая симметрия

5.1. Определение параллельного переноса

Пусть $\vec{a}$ — вектор пространства. Рассмотрим отображение пространства на себя, при котором образом любой точки M пространства является такая точка M' , что вектор $\vec{MM'}$ равен вектору $\vec{a}$: $\vec{MM'} = \vec{a}$ (рис. 23).

Можно показать, что точка M имеет при данном отображении единственный образ — точку M' , а для точки M' существует единственный прообраз — точка M .

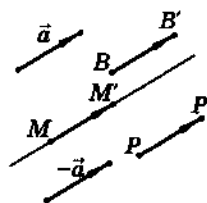


Рис. 23

Таким образом, получаем биективное отображение пространства на себя, т. е. преобразование пространства, которое называют **параллельным переносом на вектор $\vec{a}$** .

Определение. Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ называется такое преобразование пространства, при котором любая точка M отображается на такую точку M' , что выполняется векторное равенство: $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$.

Иногда параллельный перенос называют коротко *переносом*. При этом вектор $\vec{a}$ называют *вектором переноса*. Если при переносе на вектор $\vec{a}$ точка M отображается на точку M' , то пишут: $M' = \vec{a}(M)$ или $\vec{a}(M) = M'$.

Из определения следует, что параллельный перенос задается либо вектором, либо парой соответствующих точек (M, M') .

Если при переносе на вектор $\vec{a}$ точка M отображается на точку M' , то $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ (рис. 24). Тогда $\overrightarrow{M'M} = -\vec{a}$. Значит, точка M' отображается на точку M переносом на вектор $-\vec{a}$, т. е. преобразование, обратное переносу на вектор $\vec{a}$, есть перенос на вектор $-\vec{a}$.

Перенос на нулевой вектор $\vec{0}$ является тождественным преобразованием: $\vec{0}(M) = M$ для любой точки M пространства.

5.2. Параллельный перенос в координатах

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задан вектор $\vec{p}(a; b; c)$. Найдем зависимость между координатами точки $M(x; y; z)$ и ее образа $M'(x'; y'; z')$ при переносе на вектор $\vec{p}$.

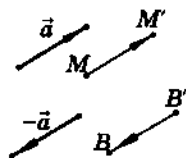


Рис. 24

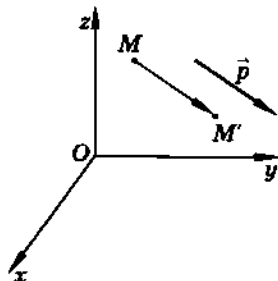


Рис. 25

Так как $M' = \vec{p}(M)$, то $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$ (рис. 25). Вектор $\overrightarrow{MM'}$ имеет координаты: $\overrightarrow{MM'} (x' - x; y' - y; z' - z)$. Тогда векторное равенство $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$ равносильно системе трех равенств $x' - x = a$, $y' - y = b$, $z' - z = c$, откуда

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases} \quad (*)$$

Соотношения (*) называются **формулами параллельного переноса пространства на вектор $\vec{p}(a; b; c)$** .

Докажем, что **параллельный перенос пространства есть движение**. Пусть: $A(x_1; y_1; z_1)$ и $C(x_2; y_2; z_2)$ — данные точки; $A'(x'_1; y'_1; z'_1)$, $C'(x'_2; y'_2; z'_2)$ — их образы при переносе на вектор $\vec{p}(a; b; c)$. На основании (*) имеем

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + a, y'_1 = y_1 + b, z'_1 = z_1 + c, \\ x'_2 &= x_2 + a, y'_2 = y_2 + b, z'_2 = z_2 + c. \end{aligned} \quad (**)$$

Расстояние между точками A и C равно

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Найдем расстояние между точками A' и C' .

Учитывая (**), получаем

$$\begin{aligned} |A'C'| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |AC|. \end{aligned}$$

Таким образом, при параллельном переносе расстояние между точками сохраняется. Значит, **параллельный перенос есть движение**.

5.3. Свойства параллельного переноса

Можно доказать, что **параллельный перенос отображает:**

- прямую на параллельную ей прямую либо на себя;
- луч на сонаправленный с ним луч;
- вектор $\overrightarrow{AB}$ на равный ему вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (на себя);
- плоскость на параллельную ей плоскость либо на себя.

Докажем, например, что **параллельный перенос отображает плоскость на параллельную ей плоскость или на себя**.

Действительно, параллельный перенос — движение, поэтому он отображает плоскость α на некоторую плоскость α' . Докажем, что $\alpha' \parallel \alpha$ или α' совпадает с α .

На плоскости α выберем две пересекающиеся прямые a и b ; $a \cap b = O$.

Пусть $\vec{p}(a) = a'$, $\vec{p}(b) = b'$ (рис. 26). Тогда $a \parallel a'$, $b \parallel b'$.

Так как любое преобразование отображает пересечение фигур на пересечение их образов и прямые a и b пересекаются в точке O , то пересекаются и прямые a' и b' в такой точке O' , что $O' = \vec{p}(O)$. Тогда либо плоскости α и α' совпадают, либо по признаку параллельности плоскостей эти плоскости параллельны, что и требовалось доказать. ▼

Рассмотрим вопрос о неподвижных точках, неподвижных прямых и неподвижных плоскостях при параллельном переносе.

Неподвижных точек параллельный перенос на ненулевой вектор не имеет.

Неподвижной прямой при параллельном переносе на ненулевой вектор $\vec{p}$ является любая прямая, параллельная вектору $\vec{p}$; на каждой из этих прямых индуцируется параллельный перенос на вектор $\vec{p}$.

Неподвижной плоскостью при параллельном переносе на ненулевой вектор $\vec{p}$ является любая плоскость, параллельная вектору $\vec{p}$; на каждой из этих плоскостей индуцируется параллельный перенос на вектор $\vec{p}$.

Параллельный перенос, отображая любой вектор на себя, не меняет ориентацию пространства, следовательно, является движением первого рода.

Рассмотрим композицию двух переносов, заданных векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ее обычно обозначают не $\vec{b} \circ \vec{a}$, а $\vec{a} + \vec{b}$.

Пусть M — любая точка пространства. Перенос на вектор $\vec{a}$ точку M отображает на такую точку M' , что $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ (рис. 27).

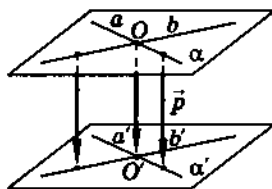


Рис. 26

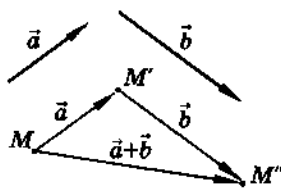


Рис. 27

Последующий перенос на вектор $\vec{b}$ точку M' отображает на такую точку M'' , что $\overrightarrow{M'M''} = \vec{b}$. По правилу сложения векторов имеем $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{a} + \vec{b}$. Это означает, что $(\vec{a} + \vec{b})(M) = M''$, т. е. перенос на вектор $(\vec{a} + \vec{b})$ точку M отображает на точку M'' .

Таким образом, композиция переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть перенос на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

Так как $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, то композиция переносов обладает свойством коммутативности: $(\vec{a} + \vec{b})(M) = (\vec{b} + \vec{a})(M)$.

5.4. Скользящая симметрия

Среди преобразований пространства важное место занимает «скользящая симметрия», представляющая собой композицию симметрии S_α относительно плоскости α и параллельного переноса на вектор $\vec{p}$, который параллелен этой плоскости (рис. 28).

Отметим ряд характерных свойств скользящей симметрии:

- скользящая симметрия является движением (как композиция двух движений);
- скользящая симметрия не имеет неподвижных точек;
- любая прямая плоскости α , параллельная вектору переноса, является неподвижной прямой скользящей симметрии; на каждой из них индуцируется параллельный перенос;
- неподвижной плоскостью скользящей симметрии является не только плоскость симметрии α (на ней индуцируется параллельный перенос на вектор $\vec{p}$), а также любая плоскость, перпендикулярная плоскости α и параллельная вектору переноса $\vec{p}$ (на каждой из таких плоскостей индуцируется скользящая симметрия, осью которой является прямая пересечения этой плоскости с плоскостью α , а вектором переноса — вектор $\vec{p}$);
- скользящая симметрия меняет ориентацию тетраэдра (значит, и ориентацию пространства), т. е. является движением второго рода;
- преобразованием, обратным скользящей симметрии, заданной плоскостью α и вектором $\vec{p}$, является скользящая симметрия, заданная той же плоскостью α и вектором $-\vec{p}$.

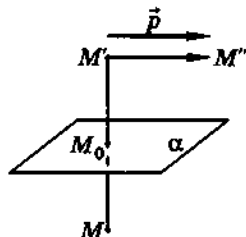


Рис. 28

Попробуйте доказать самостоятельно, что композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос, причем $Z_B \circ Z_A = \overrightarrow{2AB}$. Наоборот, любой параллельный перенос может быть разложен (неоднозначно) в композицию двух центральных симметрий.

§ 6. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия. Зеркальный поворот. Винтовое движение

6.1. Определение поворота вокруг оси

Вы открываете дверь, окно, переворачиваете страницу книги. Соответственно дверь, окно, страница книги поворачиваются в пространстве. Эти примеры дают представление о повороте в пространстве вокруг прямой.

Но прежде чем дать определение поворота в пространстве, напомним, что в планиметрии мы изучали поворот плоскости вокруг данной точки на данный ориентированный угол.

Угол AOB на плоскости считается ориентированным положительно, если поворот от OA к OB вокруг точки O происходит против часовой стрелки (рис. 29, а), и ориентированным отрицательно, если этот поворот происходит по часовой стрелке (рис. 29, б).

Поворот плоскости вокруг точки O на угол φ обозначают символом R_O^φ и запись $R_O^\varphi(M) = M'$ читают: поворот плоскости вокруг точки O на угол φ отображает точку M на точку M' . Точка O называется *центром поворота*, а угол φ — *углом поворота*.

При повороте плоскости на угол φ каждая точка плоскости поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении. Это означает, что точка M плоскости при повороте



Рис. 29

R_O^φ отображается на такую точку M' , что $OM = OM'$, $\angle MOM' = \varphi$ (знак угла φ учитывается) (рис. 30).

В дальнейшем будем рассматривать поворот только на ориентированный угол, поэтому слово «ориентированный» будем опускать, а ориентацию угла будем указывать знаком «+» или «-».

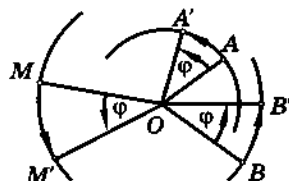


Рис. 30

Чтобы в пространстве рассматривать ориентированный на плоскости угол, необходимо договориться: «с какой стороны смотреть на плоскость». С аналогичной проблемой мы сталкивались, говоря об ориентации в пространстве.

Будем считать, что поворот в плоскости Oxy осуществляется на положительно ориентированный угол, если этот поворот наблюдается против часовой стрелки из любой точки оси аппликат, когда аппликата этой точки положительна (т. е. из любой точки положительной полуоси аппликат). Если же из любой точки положительной полуоси аппликат этот поворот наблюдается по часовой стрелке, то будем считать, что вращение в плоскости Oxy происходит на отрицательно ориентированный угол.

В таком случае, мы будем рассматривать преобразование вращения пространства вокруг ориентированной прямой (т. е. вокруг оси), и всякий раз для определения угла поворота нам придется «смотреть» с положительного направления оси вращения на плоскость, перпендикулярную этой оси. Однако это преобразование поворота часто называют просто «поворотом вокруг прямой», имея в виду поворот вокруг ориентированной прямой (рис. 31).

Перейдем теперь к определению поворота в пространстве.

Пусть l — данная ориентированная прямая. Выберем в пространстве любую точку $M \notin l$. Проведем через эту точку плос-

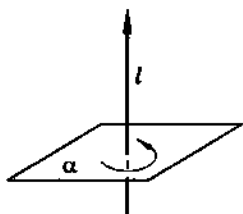


Рис. 31

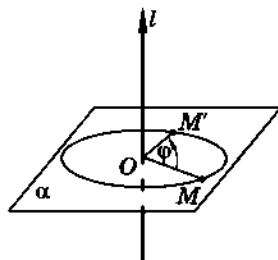


Рис. 32

кость α перпендикулярно прямой l ; обозначим $O = l \cap \alpha$ (рис. 32).

В плоскости α рассмотрим поворот вокруг точки O на угол φ . При этом повороте точка M отображается на некоторую точку M' , вращаясь по окружности с центром в точке O пересечения плоскости α с прямой l . Говорят, что точка M' является образом точки M при повороте вокруг прямой l на угол φ .

Аналогичное отображение точек пространства осуществляется в каждой плоскости, перпендикулярной прямой l .

Покажем, что заданное таким образом отображение является преобразованием пространства.

В самом деле, через точку M можно провести единственную плоскость α , перпендикулярную прямой l . Поворот R_O^φ в плоскости α точку M отображает на единственную точку M' . Таким образом, при повороте вокруг оси l на угол φ точка M имеет свой единственный образ M' . При этом точка M' отображается на свой единственный прообраз — точку M — при повороте вокруг оси l на угол $-\varphi$. Следовательно, мы получаем биективное отображение пространства на себя, т. е. его преобразование.

Определение. Поворотом пространства вокруг ориентированной прямой l на угол φ называется такое преобразование пространства, при котором любая точка прямой l остается неподвижной и в любой плоскости, перпендикулярной прямой l , индуцируется поворот этой плоскости на угол φ вокруг точки пересечения ее с прямой l .

Ориентированная прямая l называется *осью вращения* (осью поворота), а угол φ — *углом поворота*.

Поворот вокруг оси l на угол φ обозначается R_l^φ .

Если при повороте вокруг оси l на угол φ точка M отображается на точку M' , то пишут: $R_l^\varphi(M) = M'$.

Имеет место

| Теорема 4. Поворот вокруг оси есть движение.

Доказательство. Напомним, что формулы поворота плоскости Oxy вокруг начала координат имеют вид: $x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi$, $y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi$. Тогда координаты x' , y' , z' точки M' — образа точки $M(x; y; z)$ при повороте вокруг оси Oz на угол φ вычисляются по формулам:

$$x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \quad y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi, \quad z' = z.$$

Используя эти формулы, найдем и сравним расстояния между данными точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и между их образами — точками $A'(x'_1; y'_1; z'_1)$ и $B'(x'_2; y'_2; z'_2)$ — при повороте вокруг оси Oz на угол φ .

Находим:

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{((x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) - (x_2 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi))^2 + \\ &+ ((x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) - (x_2 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi))^2 + (z_1 - z_2)^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi (x_1 - x_2)^2 + \sin^2 \varphi (x_1 - x_2)^2 + \cos^2 \varphi (y_1 - y_2)^2 + \\ &+ \sin^2 \varphi (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = |AB|. \end{aligned}$$

Таким образом, при повороте вокруг оси расстояние между точками сохраняется. Значит, поворот пространства вокруг оси — движение, что и требовалось доказать. ▽

Приведем другой способ доказательства этого утверждения. Пусть A и B — данные точки, $A' = R_l^\varphi(A)$ и $B' = R_l^\varphi(B)$ — их образы при повороте вокруг оси l на угол φ . Докажем, что длины отрезков AB и $A'B'$ равны.

Если отрезок AB лежит в плоскости, перпендикулярной прямой l , то $AB = A'B'$ (из планиметрии).

Рассмотрим случай, когда прямые AB и l скрещиваются и не перпендикулярны.

Проведем через точки A и B плоскости соответственно α и β , перпендикулярные оси вращения l . Обозначим: $E = \alpha \cap l$, $H = \beta \cap l$ (рис. 33).

Опустим из точки B перпендикуляр BC на плоскость α .

В плоскости α рассмотрим поворот R_E^φ , в плоскости β — поворот R_H^φ . Пусть $A' = R_E^\varphi(A)$, $C' = R_E^\varphi(C)$, $B' = R_H^\varphi(B)$.

Так как поворот плоскости есть движение, то получаем

$$(R_E^\varphi(A) = A', R_E^\varphi(C) = C') \Rightarrow AC = A'C'.$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} BC \perp \alpha, l \perp \alpha &\Rightarrow BC \parallel l \\ \alpha \perp l, \beta \perp l &\Rightarrow \alpha \parallel \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow BH = CE, BC = HE, BC \parallel HE.$$

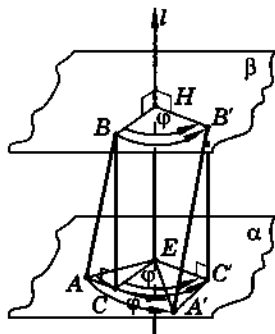


Рис. 33

Поэтому (учитывая, что $B' = R_H^0(B)$, $C' = R_E^0(C)$) отрезки HB и EC , равны и параллельны. Значит, отрезок $B'C'$ равен и параллелен отрезку HE .

Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} BC = HE, BC \parallel HE \\ B'C' = HC, B'C' \parallel HE \end{array} \right\} \Rightarrow B'C' = BC, B'C' \parallel BC.$$

Следовательно, $B'C' \perp \alpha$.

Тогда

$$\begin{aligned} (AC = A'C', BC = B'C', \angle ACB = \angle A'C'B' = 90^\circ) \Rightarrow \\ \Rightarrow \triangle ACB = \triangle A'C'B' \Rightarrow AB = A'B', \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случаи, когда прямые AB и l лежат в одной плоскости, рассмотрите самостоятельно.

Так как поворот вокруг оси есть движение пространства, то при этом повороте всякая фигура отображается на равную ей фигуру.

! **Замечание.** Пусть A и C — произвольные точки пространства такие, что полуплоскости $\alpha = (l, A)$ и $\beta = (l, C)$ образуют двугранный угол $\varphi = \angle(\alpha, \beta)$. Поворот R_l^φ отображает точки A и C на такие точки соответственно A' и C' , что $\angle AOA' = \varphi = \angle CO_1C'$, где $O \in l$, $O_1 \in l$, $OA \perp l$, $OA' \perp l$, $O_1C \perp l$, $O_1C' \perp l$. Это означает, что при повороте R_l^φ все полуплоскости, границей которых является ось вращения, поворачиваются вокруг этой оси на один и тот же угол φ в одном и том же направлении.

6.2. Свойства поворота вокруг оси и осевой симметрии

При повороте вокруг оси l на угол $\varphi \neq 180^\circ \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$:

- неподвижной является лишь каждая точка оси вращения;
- единственной неподвижной прямой является ось поворота: на ней индуцируется тождественное преобразование;
- неподвижной является любая плоскость, перпендикулярная оси вращения: в каждой из этих плоскостей индуцируется поворот на угол φ вокруг точки ее пересечения с осью l . Других неподвижных плоскостей при повороте вокруг оси не существует.

Кроме того:

- поворот — движение первого рода (для доказательства достаточно рассмотреть уже знакомый нам тетраэдр $OABC$, у которого точки O и C лежат на оси вращения, а точки B и A — в плоскости, перпендикулярной оси);
- композиция двух поворотов вокруг одной и той же оси есть поворот вокруг этой же оси;
- преобразование, обратное повороту R_l^{φ} , есть поворот $R_l^{-\varphi}$.

■ ЗАДАЧА (1.112). Даны две точки A и C . а) При каком повороте одна из них отображается на другую? б) При каком повороте каждая из них отображается на другую? в) Какую фигуру заполняют оси всех таких поворотов в каждом случае? Ответ поясните на рисунке.

Решение. а) Из планиметрии известно, что центры всех поворотов плоскости, при которых точка A отображается на точку C , принадлежат серединному перпендикуляру отрезка AC .

Проведем через середину O отрезка AC плоскость α , перпендикулярную AC (рис. 34).

В этой плоскости лежат все прямые пространства, проходящие перпендикулярно отрезку AC через его середину точку O .

Пусть a — одна из таких прямых. Проведем через прямые AC и a плоскость β . Любая точка M прямой a является центром поворота плоскости β , при котором точка A отображается на точку C . Значит, прямая l , проведенная через точку M перпендикулярно плоскости β , лежит в плоскости α и является осью поворота пространства, при котором точка A отображается на точку C .

Из сказанного следует, что любая прямая плоскости α , перпендикулярная прямой a , является осью поворота пространства, при котором точка A отображается на точку C . Все оси таких поворотов образуют в плоскости α пучок прямых, параллельных прямой l , и заполняют эту плоскость.

Изменяя положение прямой a (вращая ее вокруг точки O), будем получать новые положения плоскости β и новые повороты, оси которых будут расположены в плоскости α и параллельны новому положению (направлению) прямой

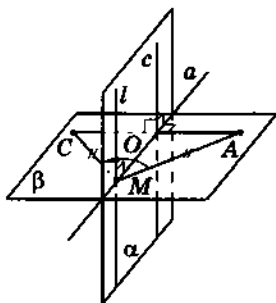


Рис. 34

$l \perp \beta$; при любом из таких поворотов точка A отображается на C . Каждый раз эти оси будут образовывать пучок параллельных прямых и заполнять одну и ту же плоскость α .

Таким образом, осью поворота, отображающего точку A на точку C , может быть любая прямая плоскости α , проходящей перпендикулярно отрезку AC через его середину O .

б) Рассмотрим прямую s , проходящую перпендикулярно отрезку AC через его середину O (см. рис. 34). Эта прямая лежит в плоскости α ($AC \perp \alpha$). Поворот вокруг прямой s на угол 180° отображает точки A и C одну на другую: $R_s^{180^\circ}(A) = C$ и $R_s^{180^\circ}(C) = A$. Все такие прямые образуют пучок с центром O и заполняют плоскость α .

О т в е т: а) Повороты вокруг любой прямой плоскости α , проходящей перпендикулярно отрезку AC через его середину;

б) повороты на 180° вокруг любой прямой, проходящей перпендикулярно отрезку AC через его середину;

в) оси поворотов (всех) заполняют плоскость α .

Поворот вокруг оси l на угол $\varphi = 180^\circ$ называется *осевой симметрией* пространства и обозначается S_l . Ось вращения называется *осью симметрии*. Таким образом, $R_l^{180^\circ} = S_l$.

При осевой симметрии (повороте вокруг оси на угол 180°):

- неподвижной является каждая точка оси симметрии и других неподвижных точек не существует;
- неподвижной прямой является ось симметрии (на ней индуцируется тождественное преобразование) и любая прямая, пересекающая ось симметрии и ей перпендикулярная (на каждой из этих прямых индуцируется центральная симметрия относительно точки ее пересечения с осью симметрии);
- неподвижной является любая плоскость, перпендикулярная оси (в каждой такой плоскости индуцируется центральная симметрия относительно точки ее пересечения с осью симметрии);

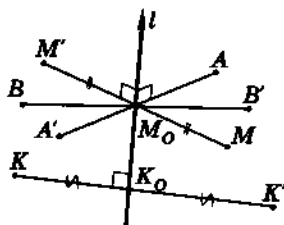


Рис. 35

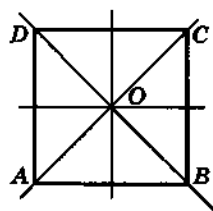


Рис. 36

- осевая симметрия — движение первого рода;
- преобразование, обратное осевой симметрии, есть эта же осевая симметрия, следовательно, композиция двух осевых симметрий относительно одной и той же оси есть тождественное преобразование.

Осевую симметрию можно изучать и вне связи с поворотом вокруг оси.

Пусть дана некоторая прямая l . Выберем любую точку $M \notin l$.

Определение. Точка M' пространства называется симметричной точке M относительно прямой l , если отрезок MM' перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам. Каждая точка прямой l считается симметричной самой себе относительно этой прямой (рис. 35).

Определение. Преобразование пространства, при котором каждая точка отображается на точку, симметричную ей относительно прямой l , называется осевой симметрией пространства относительно прямой l . Образом любой точки прямой l считается сама эта точка.

Прямая l называется *осью симметрии*.

Осевая симметрия пространства с осью l обозначается S_l . Если точка M (фигура F) осевой симметрией S_l отображается на точку M' (фигуру F'), то пишут: $S_l(M) = M'$ ($S_l(F) = F'$).

Если при симметрии относительно прямой l фигура F отображается на себя, то прямую l называют *осью симметрии этой фигуры*.

На плоскости у квадрата 4 оси симметрии (рис. 36), а в пространстве их 5 (прямая l , проходящая через центр квадрата перпендикулярно плоскости этого квадрата, также является его осью симметрии) (рис. 37). Прямая m , проходящая через центры оснований куба (рис. 38), является осью симметрии куба.

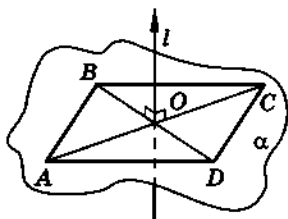


Рис. 37

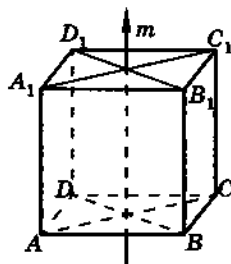


Рис. 38

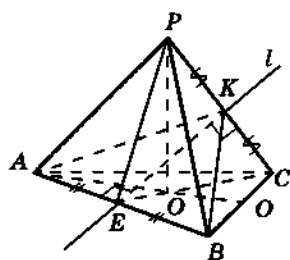


Рис. 39

Докажите это и найдите другие оси симметрии куба.

Заметим, что осевую симметрию пространства можно задать осью симметрии или двумя парами соответствующих точек A, A' и C, C' таких, что четырехугольник $ACC'A'$ — параллелограмм. (Подробнее об осевой симметрии вы, при желании, можете прочесть в дополнениях.)

■ **ЗАДАЧА (1.107).** Сколько осей симметрии имеет: а) правильный тетраэдр; б) правильная четырехугольная пирамида? Поясните ответ на рисунке.

Решение. а) Пусть точки E и K — середины ребер соответственно AB и PC правильного тетраэдра $PABC$ (рис. 39). Тогда $\triangle PCE$ — равнобедренный ($EC = EP$, как медианы равных равносторонних треугольников ABC и ABP), поэтому $EK \perp PC$.

Аналогично, $\triangle ABK$ — равнобедренный ($AK = BK$), откуда $EK \perp AB$. Таким образом, прямая $l = EK$ является общим серединным перпендикуляром отрезков AB и CP . Поэтому при симметрии относительно прямой l имеем $S_l(PC) = CP$, $S_l(AB) = BA$, $S_l(A) = B$, $S_l(C) = P \Rightarrow S_l(AC) = BP$, $S_l(A) = B$; $S_l(P) = C \Rightarrow S_l(AP) = BC$.

Это означает, что симметрия относительно прямой l вершины, ребра и грани тетраэдра $PABC$ отображает на вершины, ребра и грани этого же тетраэдра, т. е. данный тетраэдр при симметрии относительно прямой l отображается на себя. Следовательно, прямая l является осью симметрии тетраэдра $PABC$.

Аналогично, осями симметрии тетраэдра $PABC$ являются еще две прямые, одна из которых проходит через середины ребер AP и BC , другая — через середины ребер AC и BP .

Таким образом, правильный тетраэдр имеет три оси симметрии.

6.3. Зеркальный поворот и винтовое движение

Зеркальный поворот — это композиция поворота R_α^a на угол ϕ вокруг оси a и симметрии S_α относительно плоскости α , перпендикулярной этой оси (рис. 40).

При зеркальном повороте на угол $\varphi \neq 180^\circ \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$:

- единственной неподвижной точкой является точка пересечения плоскости α с осью поворота;
- неподвижной прямой является ось поворота и только она; на ней индуцируется центральная симметрия относительно точки пересечения оси вращения и плоскости симметрии;
- единственной неподвижной плоскостью является плоскость α ; в ней индуцируется поворот на угол φ вокруг точки ее пересечения с осью вращения.

Заметим, что:

- зеркальный поворот — движение второго рода;
- движение, обратное зеркальному повороту, есть зеркальный поворот относительно той же плоскости симметрии и той же оси вращения на угол, противоположный данному.

Свойства зеркального поворота при $\varphi = 180^\circ \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрите самостоятельно.

Винтовое движение — это композиция поворота R_a^φ на угол φ вокруг оси a и переноса на вектор $\vec{p}$, который параллелен этой оси (рис. 41).

При винтовом движении (если угол $\varphi \neq 180^\circ \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$):

- неподвижных точек нет;
- неподвижной прямой является ось поворота, и только она; на ней индуцируется параллельный перенос;
- неподвижных плоскостей нет.

Кроме того:

- винтовое движение — движение первого рода;
- композиция двух винтовых движений относительно одной и той же оси есть винтовое движение относительно той же оси. При этом угол поворота равен сумме углов поворотов, а вектор переноса — сумме векторов переносов;

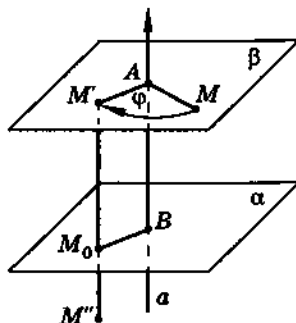


Рис. 40

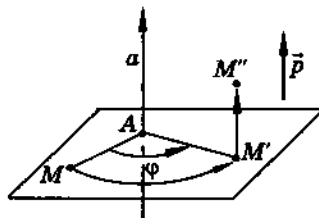


Рис. 41

- преобразование, обратное винтовому движению, есть винтовое движение вокруг той же оси; при этом угол поворота и вектор переноса соответственно противоположны данным углу поворота и вектору переноса.

§ 7. Взаимосвязь различных движений пространства

7.1. Композиция двух симметрий относительно плоскости

В п. 5.4 мы уже говорили о соотношении композиции двух центральных симметрий и параллельного переноса.

Теперь исследуем вопрос о композиции двух симметрий относительно плоскостей α и β .

Возможны следующие случаи взаимного расположения плоскостей симметрии α и β :

1) плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой l : $\alpha \cap \beta = l$;

2) плоскости α и β параллельны: $\alpha \parallel \beta$;

3) плоскости α и β совпадают: $\alpha = \beta$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $\alpha \cap \beta = l$, $\angle(\alpha, \beta) = \varphi$ (рис. 42). Выберем любую точку M ($M \notin \alpha$, $M \notin \beta$) и проведем через нее плоскость γ , перпендикулярную l ; $O = l \cap \gamma$.

Пусть $M' = S_\alpha(M)$, $M'' = S_\beta(M')$. Тогда

$$MM' \perp \alpha, l \subset \alpha \Rightarrow MM' \perp l; M'M'' \perp \beta, l \subset \beta \Rightarrow M'M'' \perp l.$$

Так как все прямые пространства, проходящие через точку M' перпендикулярно прямой l , лежат в одной плоскости, перпендикулярной l , то точки M , M' , M'' лежат в плоскости γ .

Имеем:

$$OM = OM' = OM'', \angle MOM'' = 2\angle KOH = 2\varphi,$$

где $K = MM' \cap \alpha$, $H = M'M'' \cap \beta$. Значит, $M'' = R_l^{2\varphi}(M)$.

Таким образом, получили $(S_\beta \circ S_\alpha)(M) = M''$, $R_l^{2\varphi}(M) = M''$. На основании определения равенства двух преобразований приходим к выводу: $S_\beta \circ S_\alpha = R_l^{2\varphi}$, т. е. композиция двух симметрий относительно пересекающихся плоскостей, есть поворот вокруг прямой пересечения этих плоскостей на удвоенный угол между ними.

В частности, если плоскости α и β взаимно перпендикулярны ($\varphi = 90^\circ$), то композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ является осевой симметрией относительно прямой, по которой эти плоскости пересекаются: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l \Rightarrow S_\beta \circ S_\alpha = S_l$.

2) $\alpha \parallel \beta$. Пусть M — любая точка пространства, $S_\alpha(M) = M'$, $S_\beta(M') = M''$ (рис. 43).

Так как $MM' \perp \alpha$, $M'M'' \perp \beta$, $\alpha \parallel \beta$, то точки M, M', M'' лежат на одной прямой a , перпендикулярной плоскостям α и β . При этом точки $A = a \cap \alpha$ и $B = a \cap \beta$ являются серединами отрезков соответственно MM' и $M'M''$, значит, $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB}$. Следовательно, $2\overrightarrow{AB}(M) = M''$.

Таким образом, $(S_\beta \circ S_\alpha)(M) = S_\beta(S_\alpha(M)) = S_\beta(M') = M''$, $2\overrightarrow{AB}(M) = M''$.

В силу произвольного выбора точки M и на основании определения равенства двух преобразований приходим к выводу: композиция двух симметрий относительно параллельных плоскостей есть параллельный перенос на вектор, который перпендикулярен этим плоскостям и имеет длину, равную удвоенному расстоянию между ними.

3) $\alpha = \beta$. В п. 4.1 мы уже говорили, что в этом случае $S_\alpha \circ S_\alpha = E$ — тождественное преобразование (перенос на нулевой вектор).

Заметим, что справедливы обратные утверждения: поворот вокруг оси может быть разложен (неоднозначно) в композицию зеркальных отражений от плоскостей, пересекающихся по оси поворота под углом, равным половине угла поворота; аналогично, параллельный перенос может быть разложен

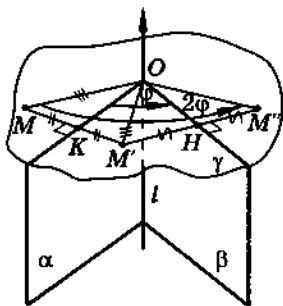


Рис. 42

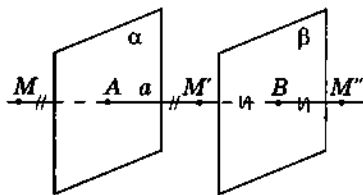


Рис. 43

(неоднозначно) в композицию зеркальных отражений от плоскостей, перпендикулярных вектору переноса, расстояние между которыми равно половине длины вектора переноса.

Разложение поворота и переноса в композицию двух плоскостных симметрий находит применение при решении разнообразных задач на построение, вычисление и доказательство.

 Докажем, например, что любые два равных отрезка, лежащие на скрещивающихся прямых, можно совместить некоторым поворотом вокруг оси. (Полезно динамику доказательства проиллюстрировать на самостоятельно выполненном вами рисунке.)

Пусть два равных отрезка AB и A_1B_1 лежат на скрещивающихся прямых p и q . При симметрии относительно плоскости α серединных перпендикуляров отрезка AA_1 имеем: $S_\alpha(A) = A_1$, $S_\alpha(B) = B'$, причем точка B' не совпадает с B_1 (прямые AB и A_1B_1 скрещиваются). Затем рассмотрим симметрию относительно плоскости β серединных перпендикуляров отрезка $B'B_1$. Так как $A_1B' = A_1B_1$, то $\triangle A_1B'B_1$ — равнобедренный и точка A_1 лежит в плоскости β . Тогда $S_\beta(A_1) = A_1$, $S_\beta(B') = B_1$. Таким образом, $(S_\beta \circ S_\alpha)(AB) = A_1B_1$. Но плоскости α и β не параллельны (почему?), значит, композиция двух симметрий S_α и S_β , отображающая отрезок AB на равный ему отрезок A_1B_1 , является поворотом вокруг прямой пересечения плоскостей α и β . Утверждение доказано. ▼ 

7.2. Виды движений пространства

Нами изучены четыре основных вида движений пространства:

- центральная симметрия;
- зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости);
- параллельный перенос;
- поворот вокруг оси (в частности, осевая симметрия).

Мы рассматривали также композиции некоторых двух из этих четырех основных видов движений пространства. В ряде случаев такой композицией оказывалось одно из тех же четырех основных движений. Например, композицией двух зеркальных симметрий является либо поворот вокруг оси, либо параллельный перенос.

Вместе с тем, композицией некоторых двух из основных видов движений оказывалось **новое движение пространства**, не совпадающее ни с одним из основных его видов. Например:

- композицией зеркальной симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный плоскости симметрии, является скользящая симметрия;
- композицией зеркальной симметрии и поворота вокруг прямой, перпендикулярной плоскости симметрии, является зеркальный поворот;
- композицией поворота вокруг оси и переноса на вектор, параллельный оси поворота, является винтовое движение.

Таким образом, получили семь различных видов движений пространства.

Попробуйте начертить в тетради и заполнить следующую таблицу:

Виды движения	Неподвижные точки	Неподвижные прямые	Неподвижные плоскости	Ориентация
Центральная симметрия				
Зеркальная симметрия				
Параллельный перенос				
Поворот вокруг оси				
Скользящая симметрия				
Зеркальный поворот				
Винтовое движение				

Возникает вопрос: существуют ли какие-либо другие, отличные от семи перечисленных, виды движений пространства?

⇐ Напомним, что вопрос о существовании различных видов движений плоскости был решен французским математиком и

механиком *Мишелем Шалем* (1793—1880). Он доказал, что «Любое движение плоскости, сохраняющее ориентацию треугольника (движение первого рода), есть либо параллельный перенос, либо поворот (в частности, центральная симметрия). Любое движение плоскости, изменяющее ориентацию треугольника (движение второго рода), является осевой или скользящей симметрией». $\Leftarrow$

Аналогичная теорема имеет место и в пространстве:

«Любое движение пространства, сохраняющее ориентацию тетраэдра (движение первого рода), есть либо параллельный перенос, либо поворот вокруг оси (в частности, осевая симметрия), либо винтовое движение. Любое движение пространства, изменяющее ориентацию тетраэдра (движение второго рода), представляет собой либо зеркальную симметрию, либо скользящую симметрию, либо зеркальный поворот (в частности, центральную симметрию — зеркальный поворот на угол 180°)».

Мы примем эту замечательную теорему без доказательства.

 Заметим, что если движение g пространства отображает ортонормированный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ на ортонормированный базис $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, то декартова прямоугольная система координат $Oxyz$, соответствующая базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, отображается движением g на декартову прямоугольную систему координат $O'x'y'z'$, соответствующую базису $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Более того, если при этом движении образом любой точки M является точка M' , то координаты точки M' в системе координат $O'x'y'z'$ равны соответствующим координатам точки M в системе координат $Oxyz$.

Справедливо обратное утверждение. Заданием в пространстве двух ортонормированных базисов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ (двух прямоугольных систем координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$) однозначно определяется некоторое движение g пространства, если образом точки M с координатами x, y, z в системе координат $Oxyz$ считать точку M' с такими же координатами в системе координат $O'x'y'z'$. (Это утверждение легко доказывается в координатах с помощью формулы расстояния между двумя точками.)

Если теперь ввести обозначения: $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$, $\overrightarrow{O'A'} = \vec{i}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \vec{j}'$, $\overrightarrow{O'C'} = \vec{k}'$, то получаем два равных тетраэдра $OABC$ и $O'A'B'C'$ (свойства этих тетраэдров понятны из постро-

ения). Назовем их *базисными тетраэдрами*. Тогда предыдущее утверждение можно сформулировать так: движение пространства может быть задано двумя равными базисными тетраэдрами $OABC$ и $O'A'B'C'$ или для любых двух равных базисных тетраэдров $OABC$ и $O'A'B'C'$ существует единственное движение, отображающее тетраэдр $OABC$ на тетраэдр $O'A'B'C'$.

Более того, не только заданием двух равных базисных тетраэдров определяется движение пространства. Движение пространства может быть определено двумя любыми равными тетраэдрами $OABC$ и $O_1A_1B_1C_1$, т. е. такими, что $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $OC = O_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

Принимая это во внимание, изложим идею доказательства того, что любое движение пространства можно представить в виде композиции не более четырех симметрий относительно плоскости. (Для наглядной иллюстрации каждого из этапов предстоящего рассуждения можно выполнить соответствующий рисунок.)

Пусть движение h задано двумя равными тетраэдрами $OABC$ и $O_1A_1B_1C_1$, где тетраэдр $O_1A_1B_1C_1$ — образ тетраэдра $OABC$ при движении h .

Если α — плоскость серединных перпендикуляров отрезка OO_1 , то $S_\alpha(O) = O_1$. Пусть при этой симметрии: $S_\alpha(A) = A'$, $S_\alpha(B) = B'$, $S_\alpha(C) = C'$ (если первоначально точки O и O_1 совпадают, то преобразование симметрии S_α не требуется).

Если теперь β — плоскость серединных перпендикуляров отрезка $A'A_1$, то эта плоскость проходит через точку O_1 ($\triangle A'O_1A_1$ — равнобедренный, так как $O_1A' = O_1A_1$ и $S_\beta(O_1) = O_1$, $S_\beta(A') = A_1$). Пусть при этой симметрии: $S_\beta(B') = B''$, $S_\beta(C') = C''$ (если после симметрии S_α точки A' и A_1 совпали, то преобразование симметрии S_β не требуется).

Далее, если γ — плоскость серединных перпендикуляров отрезка $B''B_1$, то в ней лежат точки O_1 и A_1 (треугольники $A_1B''B_1$ и $O_1B''B_1$ — равнобедренные), значит, $S_\gamma(O_1) = O_1$, $S_\gamma(A_1) = A_1$, $S_\gamma(B'') = B_1$.

Пусть $S_\gamma(C'') = C'''$ (если после преобразования S_β точки B'' и B_1 совпали, то преобразование S_γ не требуется).

Получили: композиция $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ трех плоскостных симметрий отобрадила $\triangle OAB$ на $\triangle O_1A_1B_1$ (совместила треугольник OAB с треугольником $O_1A_1B_1$). Если при этом точка C'''

совместилась с точкой C_1 , то для совмещения тетраэдра $OABC$ с тетраэдром $O_1A_1B_1C_1$ мы обошлись не более чем тремя симметриями; если совмещения точки C''' с точкой C_1 не произошло, то применим четвертую симметрию — симметрию относительно плоскости $\delta = (O_1A_1B_1)$, в результате чего точка C''' совместится с точкой C_1 , а следовательно, и тетраэдр $O_1A_1B_1C'''$ — с тетраэдром $O_1A_1B_1C_1$.

Итак, композиция не более четырех плоскостных симметрий отображала тетраэдр $OABC$ на равный ему тетраэдр $O_1A_1B_1C_1$. Но движение h также отображает тетраэдр $OABC$ на тетраэдр $O_1A_1B_1C_1$. На основании определения равенства двух преобразований приходим к выводу, который примем за теорему.

Теорема 5. Всякое движение пространства есть композиция не более четырех симметрий относительно плоскости.

Прокомментируем содержание этой теоремы следующим образом.

Пусть g — любое движение пространства. Если g — перенос или поворот вокруг оси (включая осевую симметрию), то $g = S_\beta \circ S_\alpha$, где α и β — соответственно пересекающиеся или параллельные плоскости; если g — центральная симметрия, то $g = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$, где плоскости α , β и γ попарно взаимно перпендикулярны; если g — симметрия относительно плоскости α , то $g = S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta$, где плоскости β , γ и δ параллельны α ; если g — зеркальный поворот, то $g = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$, где плоскости β и γ пересекаются по прямой, перпендикулярной плоскости α ; если g — скользящая симметрия, то $g = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$, где плоскости β и γ параллельны между собой, но перпендикулярны плоскости α ; если g — винтовое движение, то $g = S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$, где плоскости α и β параллельны, а плоскости γ и δ пересекаются по прямой, перпендикулярной α и β .

Таким образом, действительно, любое движение пространства можно разложить в композицию не более четырех симметрий относительно плоскости, и два равных тетраэдра можно совместить композицией не более чем двух из четырех основных движений пространства или одним из перечисленных выше семи движений. При этом любое движение первого рода представимо в виде композиции двух или четырех зеркальных симметрий, а движение второго рода есть либо зеркаль-

ная симметрия, либо представимо в виде композиции трех зеркальных симметрий относительно трех плоскостей.

Попробуйте доказать, что для совмещения любых двух равных тетраэдров нельзя обойтись лишь композицией нескольких параллельных переносов и поворотов вокруг оси. 

§ 8. Гомотетия и подобие пространства

8.1. Определение гомотетии пространства

Пусть O — данная точка пространства, k — данное число, $k \neq 0$. Зададим следующее отображение пространства на себя. Образом произвольной точки M пространства будем считать такую точку M' , что $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ (рис. 44).

Точка M имеет единственный образ — точку M' . Более того, из равенства $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ находим $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. Это означает, что точка M' имеет единственный прообраз — точку M , которая получается, если вектор $\overrightarrow{OM'}$ умножить на число $\frac{1}{k}$. Следовательно, мы имеем биективное (взаимно-однозначное) отображение пространства на себя, т. е. преобразование пространства, которое называют *гомотетией с центром O и коэффициентом k* . Заметим, что точка O отображается сама на себя.

Определение. Гомотетией пространства с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование пространства, при котором любая точка M отображается на такую точку M' , что $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k обозначают H_O^k .

Если при этой гомотетии точка M отображается на точку M' , то пишут $H_O^k(M) = M'$ или $M' = H_O^k(M)$ и говорят, что точка M' гомотетична точке M . Аналогично определяются гомотетичные фигуры.

При $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием, а при $k = -1$ — центральной симметрией с центром в центре гомотетии.

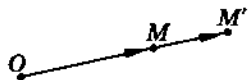


Рис. 44

Из равенства $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ находим $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$, откуда следует, что точка M является образом точки M' при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Это означает, что преобразование, обратное гомотетии H_O^k , есть гомотетия с тем же центром O и коэффициентом, равным $\frac{1}{k}$: $(H_O^k)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}}$.

Изучите взаимное расположение точек O , A и $A' = H_O^k(A)$ при:

- $k < 0$;
- $0 < k < 1$;
- $k = 1$;
- $k > 1$.

Рассмотрим композицию двух гомотетий $H_O^{k_1}$ и $H_O^{k_2}$ с общим центром O и коэффициентами k_1 и k_2 ($k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$).

Пусть M — произвольная точка пространства. Тогда образом точки M при гомотетии $H_O^{k_1}$ является такая точка M' , что $\overrightarrow{OM'} = k_1\overrightarrow{OM}$. При последующей гомотетии $H_O^{k_2}$ образом точки M' является такая точка M'' , что $\overrightarrow{OM''} = k_2\overrightarrow{OM'}$ (рис. 45).

Имеем $\overrightarrow{OM''} = k_2\overrightarrow{OM'} = (k_2 \cdot k_1)\overrightarrow{OM} = (k_1 \cdot k_2)\overrightarrow{OM}$. Из этого равенства следует, что точка M отображается на точку M'' при гомотетии с центром O и коэффициентом, равным $k_1 \cdot k_2$, т. е. $H_O^{k_1 k_2}(M) = M''$.

Таким образом, композицией двух гомотетий с общим центром O и коэффициентами k_1 и k_2 является гомотетия с центром O и коэффициентом $k_1 \cdot k_2$: $H_O^{k_1} \circ H_O^{k_2} = H_O^{k_1 k_2}$.

В частности, $H_O^k \circ H_O^{\frac{1}{k}} = H_O^{\frac{1}{k}} \circ H_O^k = H_O^{\frac{1}{k} \cdot k} = H_O^1 = E$, т. е. композиция двух гомотетий с общим центром и взаимно обратными коэффициентами является тождественным преобразованием.

8.2. Формулы и свойства гомотетии пространства

Выведем формулы гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом k .

Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка пространства, $M'(x'; y'; z')$ — ее образ при гомотетии H_O^k (рис. 46).

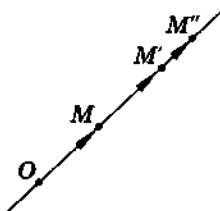


Рис. 45

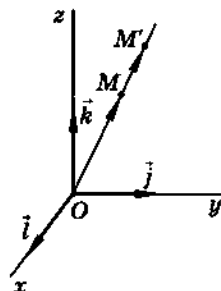


Рис. 46

По определению гомотетии $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Это векторное равенство в координатной форме равносильно системе равенств

$$x' = kx, y' = ky, z' = kz. \quad (1)$$

Соотношения (1) называются *формулами гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом k*.

Теорема 6. При гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками изменяется в $|k|$ раз.

Доказательство. Рассмотрим гомотетию H_O^k . Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$, $C(x_2; y_2; z_2)$ — данные точки; $A'(x'_1; y'_1; z'_1)$, $C(x'_2; y'_2; z'_2)$ — их образы при гомотетии H_O^k .

На основании формул (1) имеем

$$\begin{aligned} x'_1 &= kx_1, y'_1 = ky_1, z'_1 = kz_1; \\ x'_2 &= kx_2, y'_2 = ky_2, z'_2 = kz_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда для расстояний $A'C'$ и AC , учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} |A'C'| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \\ &= \sqrt{k^2((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)} = \\ &= |k| \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |k| \cdot |AC|. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ▼

Теорема 7. При гомотетии плоскость отображается на параллельную ей или совпадающую с ней плоскость.

Доказательство. Прямоугольную систему координат $Oxyz$ выберем так, чтобы ее начало O совпадало с центром гомоте-

тии и рассмотрим плоскость α , заданную в этой системе координат уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (*)$$

Точка $M(x; y; z)$, координаты x, y, z которой удовлетворяют уравнению $(*)$ плоскости α , при гомотетии H_O^k отображается на некоторую точку $M'(x'; y'; z')$ (рис. 47).

Согласно (1), $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$. Выразив из этих формул переменные x, y, z и подставив их значения в уравнение $(*)$, получим уравнение $A\frac{x'}{k} + B\frac{y'}{k} + C\frac{z'}{k} + D = 0$. Преобразуем его к виду

$$Ax' + By' + Cz' + kD = 0. \quad (**)$$

Уравнение $(**)$, которому удовлетворяют координаты точки M' , задает некоторую плоскость α' . Это означает, что образом плоскости при гомотетии является плоскость.

Перейдя к обычным обозначениям переменных (без штрихов), получаем следующее уравнение плоскости α' :

$$Ax + By + Cz + kD = 0.$$

Из уравнений плоскостей α и α' следует, что эти плоскости или параллельны (при $D \neq 0$), или совпадают (при $D = 0$), так как обе они имеют один и тот же нормальный вектор $\vec{n}$ ($A; B; C$). Теорема доказана. ▼

Следствие 1. При гомотетии прямая отображается на параллельную ей или совпадающую с ней прямую.

Доказательство. Пусть прямая a является пересечением двух плоскостей α и β : $a = \alpha \cap \beta$. При гомотетии плоскости α и β отображаются на некоторые плоскости α' и β' , причем α' па-

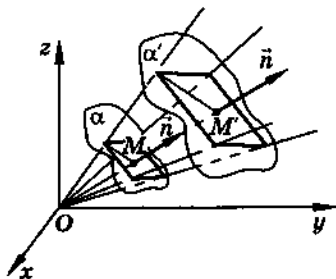


Рис. 47

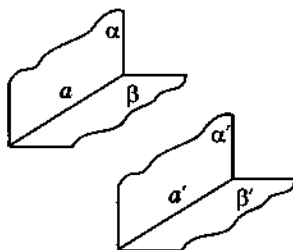


Рис. 48

параллельна α или совпадает с ней, β' и β также параллельны или совпадают (рис. 48). Так как любое преобразование отображает пересечение фигур на пересечение их образов, то прямая a пересечения плоскостей α и β отобразится на прямую пересечения плоскостей α' и β' . Обозначим $a' = \alpha' \cap \beta'$. Учитывая взаимное расположение α' и α , а так же β' и β получаем: прямая a' параллельна прямой a , либо с ней совпадает, что и требовалось доказать. ▼

Перечислим еще некоторые свойства гомотетии:

- при гомотетии величина плоского угла сохраняется;
- при гомотетии величина двугранного угла сохраняется;
- при гомотетии образом многогранного угла является равный ему многогранный угол;
- отношение площадей гомотетичных фигур равно квадрату коэффициента гомотетии;
- гомотетия с положительным коэффициентом не меняет ориентации тетраэдра (пространства), а с отрицательным коэффициентом — меняет.

Впоследствии мы узнаем, что отношение объемов гомотетичных фигур равно модулю куба коэффициента гомотетии.

■ **ЗАДАЧА (1.123).** $PABC$ — правильный тетраэдр. Постройте его образ при гомотетии: 1) с центром C и коэффициентом, равным: а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1 ; 2) с центром в центре грани ABC и коэффициентом, равным: а) $\frac{1}{2}$; б) -1 .

Решение. Предварительно рассмотрим следующий вопрос.

Пусть при гомотетии $H_{\frac{1}{2}}^{-1}$ с центром O точка M отображается на точку M' . $H_{\frac{1}{2}}^{-1}(M) = M'$. Тогда: 1) $\overrightarrow{OM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{OM'}$, т. е. точка O лежит между точками M' и M (рис. 49, а); 2) $|\overrightarrow{OM'}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OM}|$, т. е. расстояние от точки M' до точки O в два раза меньше расстояния от точки M до точки O .

Принимая это во внимание, решим задачу 1 пункт в): центром гомотетии является вершина C данного тетраэдра $PABC$. Сначала строим точки $A' = H_{\frac{1}{2}}^{-1}(A)$, $B' = H_{\frac{1}{2}}^{-1}(B)$,

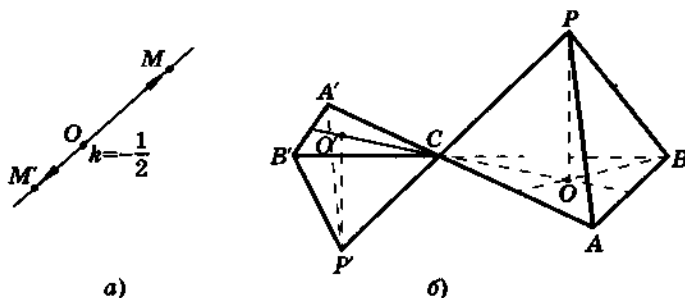


Рис. 49

$P' = H_C^{-\frac{1}{2}}(P)$ (рис. 49, б), при этом заметим, что центр C гомотетии отображается на себя: $H_C^{-\frac{1}{2}}(C) = (C)$, а отрезок AB при этой гомотетии отображается на параллельный ему отрезок $A'B'$, причем $A'B' = \frac{1}{2}AB$.

Для остальных ребер тетраэдра $PABC$ имеем:

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(BC) = B'C, B'C = \frac{1}{2}BC, \text{ точка } B' \text{ лежит на прямой } BC;$$

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(AC) = A'C, A'C = \frac{1}{2}AC, \text{ точки } A, A', C \text{ лежат на одной прямой};$$

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(AP) = A'P', A'P' = \frac{1}{2}AP, A'P' \parallel AP;$$

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(BP) = B'P', B'P' = \frac{1}{2}BP, B'P' \parallel BP;$$

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(CP) = CP', CP' = \frac{1}{2}CP, \text{ точка } P' \text{ лежит на прямой } CP.$$

Так как точки A, B, C, P не лежат в одной плоскости, то точки A', B', C, P' также не лежат в одной плоскости. Соединив отрезками прямых попарно эти точки, получаем тетраэдр $P'A'B'C'$, который гомотетичен данному тетраэдру $PABC$. При гомотетии $H_C^{-\frac{1}{2}}$:

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(\text{тетраэдр } PABC) = \text{тетраэдр } P'A'B'C'.$$

Грани тетраэдра $P'A'B'C'$ являются образами соответствующих граней тетраэдра $PABC$:

$$H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C, H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABP) = \triangle A'B'P', \\ H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle BCP) = \triangle B'CP', H_C^{-\frac{1}{2}}(\triangle ACP) = \triangle A'CP'.$$

При этом соответствующие грани данного и построенного тетраэдров лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.

8.3. Подобие пространства.

Разложение подобия в композицию гомотетии и движения

Подобие с коэффициентом k обозначают символом P_k .

Определение. Подобием пространства с коэффициентом k ($k > 0$) называется такое преобразование пространства, при котором расстояние между любыми двумя точками изменяется в k раз, т. е. для любых двух точек A и B длина отрезка $A'B'$ равна $k \cdot |AB|$, где $A' = P_k(A)$ и $B' = P_k(B)$.

Подобие пространства называют также *подобным преобразованием пространства* или его *преобразованием подобия*.

Если при этом подобии фигура F отображается на фигуру F' , то пишут $P_k(F) = F'$ и говорят, что фигура F' **подобна** фигуре F .

Можно убедиться, что преобразование подобия пространства существует.

В самом деле, любое движение пространства есть подобие с коэффициентом $k = 1$; любая гомотетия пространства с коэффициентом $k > 0$ есть подобие с тем же коэффициентом; гомотетия с коэффициентом $k < 0$ есть подобие с коэффициентом $|k|$. Далее, композиция $g \circ H_C^k$ гомотетии с коэффициентом k и движения g является подобием с коэффициентом $|k|$, так как расстояния между точками, измененные в $|k|$ раз при гомотетии, остаются таковыми при последующем движении.

Аналогично, композиция $H_C^k \circ g$ движения g и гомотетии H_C^k также является подобием с коэффициентом $|k|$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 8. Подобие с коэффициентом k можно разложить в композицию движения и гомотетии с некоторым центром и тем же коэффициентом.

Доказательство. Пусть P_k — данное подобие пространства.

Рассмотрим гомотетию $H_A^{\frac{1}{k}}$ пространства с некоторым центром A и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Композиция подобия с коэффициентом k и гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{k}$ не изменяет расстояния между точками, поэтому является движением пространства.

Композиция $H_A^k \circ H_A^{\frac{1}{k}}$ гомотетий с общим центром A и взаимно обратными коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ является тождественным преобразованием E : $H_A^k \circ H_A^{\frac{1}{k}} = E$. Тогда получаем $H_A^{\frac{1}{k}} \circ P_k = g$, g — движение $\Leftrightarrow H_A^k \circ (H_A^{\frac{1}{k}} \circ P_k) = H_A^k \circ g \Leftrightarrow (H_A^k \circ H_A^{\frac{1}{k}}) \circ P_k = H_A^k \circ g \Leftrightarrow E \circ P_k = H_A^k \circ g \Leftrightarrow P_k = H_A^k \circ g$, что и требовалось доказать. ▽

Так как подобие есть композиция движения и гомотетии, а гомотетия и движение отображают прямые, плоскости, отрезки, лучи соответственно на прямые, плоскости, отрезки, лучи, то при подобии прямые, плоскости, отрезки и лучи отображаются также на прямые, плоскости, отрезки и лучи соответственно.

Более того, при подобии сохраняется величина угла (плоского и двугранного), параллельные прямые (плоскости) отображаются на параллельные прямые (плоскости), перпендикулярная прямая и плоскость — на перпендикулярные прямую и плоскость.

Справедливость этих утверждений можно доказать, используя теорему 8. Прodelайте это самостоятельно.

Из сказанного выше следует, при подобном преобразовании пространства образом любой фигуры является «похожая» на нее фигура, т. е. фигура, имеющая такую же форму, что и отображаемая (данная) фигура, но отличающаяся от данной лишь «своими размерами».

Рассмотрим вопрос о композиции двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 .

Пусть A и C — данные точки пространства. Если при подобии P_{k_1} точки A и C отображаются соответственно на точки A' и C' , а при последующем подобии P_{k_2} точки A' и C' на точки соответственно A'' и C'' , то $|A'C'| = k_1|AC|$, $|A''C''| = k_2|A'C'|$. Поэтому $|A''C''| = k_2|A'C'| = k_2(k_1|AC|) = (k_1 \cdot k_2)|AC|$, т. е. при композиции двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 расстояние между точками изменяется в $k_1 \cdot k_2$ раз. Но подобие с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$ изменяет расстояние между точками также в $k_1 \cdot k_2$ раз.

Из сказанного следует, что композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$:

$$P_{k_1} \circ P_{k_2} = P_{k_1 k_2}.$$

Далее найдем преобразование, обратное подобию P_k .

Пусть это преобразование отображает точки A и C соответственно на точки A' и C' . Тогда $|A'C'| = k|AC|$, откуда $|AC| = \frac{1}{k}|A'C'|$. Из этого равенства следует, что точки A' и C' отображаются на точки соответственно A и C при подобии с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Но точки $A' = P_k(A)$ и $C' = P_k(C)$ отображаются на свои прообразы — точки A и C — преобразованием, обратным подобию P_k . Поэтому преобразованием, обратным подобию P_k , является подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$:

$$P_k^{-1} = P_{\frac{1}{k}}.$$

Заметим, что тождественное преобразование является подобием с коэффициентом k , равным 1. Это означает, что любая фигура подобна самой себе.

Таким образом, а) композиция двух подобий является подобием; б) преобразование, обратное подобию, есть подобие; в) тождественное преобразование — подобие.

8.4. О подобии фигур в пространстве

Вопрос о подобии фигур в пространстве можно рассматривать с точки зрения преобразований подобия, введя следующее определение.

Определение. Фигура F_1 называется подобной фигуре F , если существует подобие пространства, отображающее фигуру F на фигуру F_1 .

Если фигура F_1 подобна фигуре F , то пишут: $F_1 \sim F$.

Рассмотрим свойства отношения подобия фигур.

1. Если фигура F_2 подобна F_1 , то существует подобие P_k , которое фигуру F_1 отображает на фигуру F_2 . Тогда подобие $P_{\frac{1}{k}}$

с коэффициентом $\frac{1}{k}$ фигуру F_2 отображает на фигуру F_1 . Теперь по определению подобных фигур фигура F_1 подобна фигуре F_2 .

Таким образом, получили

$$F_2 \sim F_1 \Rightarrow F_1 \sim F_2.$$

В таком случае говорят, что отношение подобия фигур обладает свойством симметричности.

2. Пусть фигура F_1 подобна фигуре F ($F_1 \sim F$), а фигура F_2 подобна фигуре F_1 ($F_2 \sim F_1$). Это означает, что существуют такие два подобия P_{k_1} и P_{k_2} , что $F_1 = P_{k_1}(F)$ и $F_2 = P_{k_2}(F_1)$. Тогда $P_{k_2}(F_1) = P_{k_2}(P_{k_1}(F)) = (P_{k_2} \circ P_{k_1})(F) = P_{k_1 k_2}(F) = F_2$, т. е. композиция подобий P_{k_1} и P_{k_2} фигуру F отображает на фигуру F_2 . Но композиция двух подобий есть подобие. Следовательно, фигура F_2 подобна фигуре F .

Таким образом, получаем

$$F_1 \sim F, F_2 \sim F_1 \Rightarrow F_2 \sim F.$$

В этом случае говорят, что отношение подобия фигур обладает свойством транзитивности.

3. Так как тождественное преобразование есть подобие с коэффициентом $k = 1$, то любая фигура подобна самой себе: $F \sim F$. В этом случае говорят, что отношение подобия фигур обладает свойством рефлексивности.

Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения подобия фигур позволяют разбить множество всех фигур пространства на подмножества — попарно непересекающиеся классы подобных между собою фигур: каждый класс представляет собой множество всех подобных

друг другу фигур пространства. При этом любая фигура пространства принадлежит одному и только одному из этих классов.

Например, множество всех кубов — один класс, множество всех правильных тетраэдров — другой класс подобных между собой фигур.

Замечательным является тот факт, что все фигуры одного и того же класса обладают одними и теми же геометрическими свойствами с точностью до подобия (имеют одинаковую форму, но отличаются размерами: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия; далее мы узнаем, что отношение объемов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия).

Для изучения геометрических свойств фигур какого-либо класса достаточно изучить эти свойства произвольно выбранной (любой) фигуры этого класса: такими же свойствами (с точностью до подобия) обладают все фигуры этого класса.



§ 9. Понятие многогранника

9.1. Геометрическое тело

Одним из основных объектов изучения стереометрии являются геометрические тела. К ним относятся уже известные нам тетраэдр, куб, параллелепипед, призма, цилиндр, конус и шар.

Наглядные представления позволяют обнаружить у любого геометрического тела его *внутренние точки*, т. е., на интуитивном уровне, такие точки, которые отделены от остальных точек пространства границей этого тела. Например, внутренность шара отделена от остальных точек пространства своей границей — сферой, а внутренность куба — также своей границей — шестью его гранями.

При этом следует заметить, что любые две внутренние точки, например, шара, могут быть соединены линией, целиком содержащейся внутри этого шара, т. е. линией, состоящей только из внутренних точек данного шара.

Ранее, при изучении различных разделов стереометрии 10 класса, мы использовали такие геометрические тела, как куб, правильный тетраэдр, параллелепипед, призму и др.

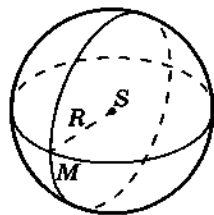


Рис. 50

Вместе с тем, мы не вводили определения ни одной из этих фигур, а при изображении их пользовались лишь теми наглядными представлениями о них, которые приобрели в основной школе и из практики.

Теперь нам предстоит ввести определения каждой из упомянутых выше фигур. Но прежде введем ряд необходимых понятий.

Определение. Шаром с данным центром S и радиусом $R > 0$ называется множество всех точек M пространства, расстояние от каждой из которых до центра S не превосходит R , т. е. $MS \leq R$ (рис. 50).

Заметим, что множество всех точек M пространства, для каждой из которых выполняется условие $MS = R$, представляет собой сферу с центром S и радиусом R .

Аналогично определению выпуклой фигуры на плоскости введем понятие выпуклой фигуры в пространстве.

Определение. Фигура F называется выпуклой, если отрезок AB с концами в любых двух точках A и B фигуры F целиком содержится в этой фигуре.

На рисунке 51, а изображена выпуклая фигура: любой отрезок, соединяющий две произвольные точки фигуры F_1 , целиком содержится в этой фигуре. Один из таких отрезков — отрезок AB — изображен на рисунке 51, а.

Фигура F_2 (рис. 51, б) выпуклой не является (является невыпуклой), так как можно указать такие две точки A и B фигуры F_2 , что отрезок AB целиком в этой фигуре не содержится: на отрезке AB есть точки (это точки, лежащие между точками M и C), не принадлежащие фигуре F_2 .

Фигура F называется связной, если любые две ее точки можно соединить линией, целиком лежащей в этой фигуре F .

При этом линия, соединяющая точки, может оказаться довольно сложной конфигурации.

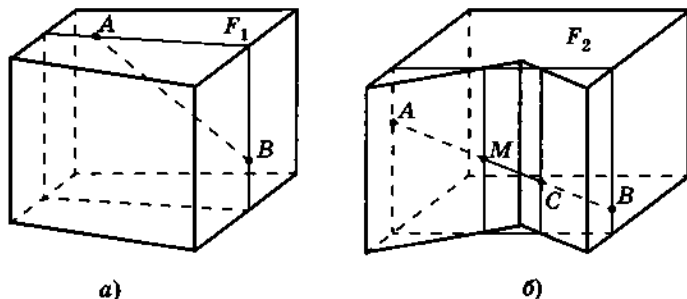


Рис. 51

На рисунке 52, а изображена связная фигура F : любые точки K и M этой фигуры соединены ломаной KAM , целиком лежащей в фигуре F . Фигура F , изображенная на рисунке 52, б, является объединением фигур F_1 и F_2 — тетраэдров $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$, не имеющих общих точек. Если точка K принадлежит тетраэдру $PABC$, а точка M — тетраэдру $P_1A_1B_1C_1$, то соединить точки K и M линией, целиком лежащей в фигуре $F = F_1 \cup F_2$, невозможно, так как эти точки принадлежат (по одной) непересекающимся тетраэдрам. Поэтому фигура F , состоящая из двух непересекающихся тетраэдров, является несвязной.

Фигуры, изображенные на рисунке 51, а, б, связны.

Теперь дадим определение внутренней точки фигуры.

Точка M фигуры F называется внутренней точкой этой фигуры, если найдется шар с центром в точке M , целиком содержащийся в фигуре F .

Можно, например, говорить о множестве всех внутренних точек куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4 (рис. 53). Так как $OO_1 = 4$, то $SO = SO_1 = 2$. Шар с центром S и радиусом $R < 2$ целиком содержится в данном кубе. Значит, S — внутренняя точка куба.

Если M — любая точка куба, не принадлежащая его граням, то найдем расстояния от точки M до всех шести плоскостей, в которых лежат грани куба. Пусть d — наименьшее из этих шести расстояний. Тогда шар с центром M и радиусом $R \leq d$ целиком содержится в кубе. Поэтому точка M является внутренней точкой куба. Это означает, что любая точка куба, не принадлежащая его граням, является внутренней точкой этого куба.

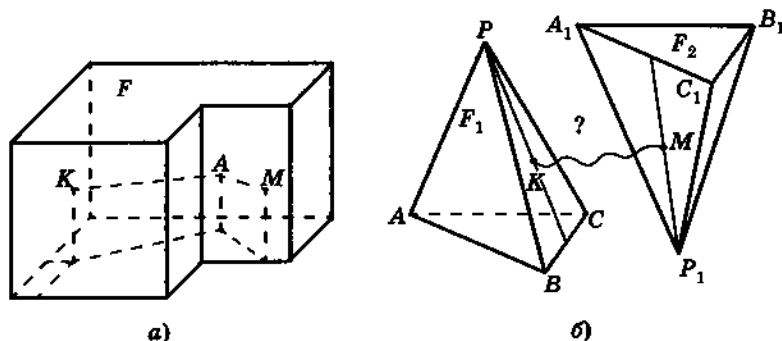


Рис. 52

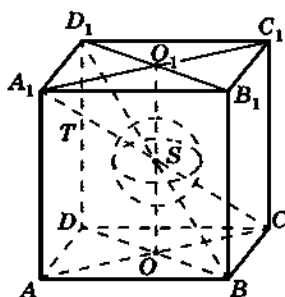


Рис. 53

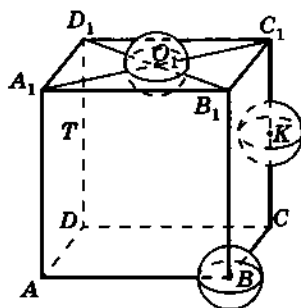


Рис. 54

Определение. Точка M пространства называется граничной точкой фигуры F , если любой шар с центром в точке M содержит как точки фигуры F , так и точки, не принадлежащие этой фигуре. Множество всех граничных точек фигуры F называется границей этой фигуры.

Точка O_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 54), точка K ребра CC_1 , вершина B куба являются граничными точками этого куба, так как любой шар с центром $O_1(K, B)$ содержит как точки данного куба, так и не принадлежащие ему точки. Поэтому каждая вершина куба, каждая точка каждого ребра, каждая точка каждой его грани — граничные точки куба. Это означает, что границей куба является объединение всех шести его граней.

Границей же шара с центром O и радиусом $R > 0$ является сфера с центром O и радиусом R .

Таким образом, для любой связной фигуры могут существовать три вида точек: ее внутренние точки, ее граничные точки и еще точки, ей не принадлежащие (их называют *внешними точками фигуры*). Для несвязных фигур существуют еще изолированные точки.

Фигура F называется ограниченной, если найдется шар, целиком содержащий эту фигуру.

Пусть $PABC$ — тетраэдр, O — его точка (рис. 55, а), m — наибольшее из расстояний OA, OB, OC, OP от точки O до вершин тетраэдра. Тогда шар с центром O и радиусом $R > m$ содержит целиком тетраэдр $PABC$. Значит, тетраэдр — ограниченная фигура.

Фигура, представляющая собой объединение двух непересекающихся тетраэдров (рис. 55, б), также является ограниченной.

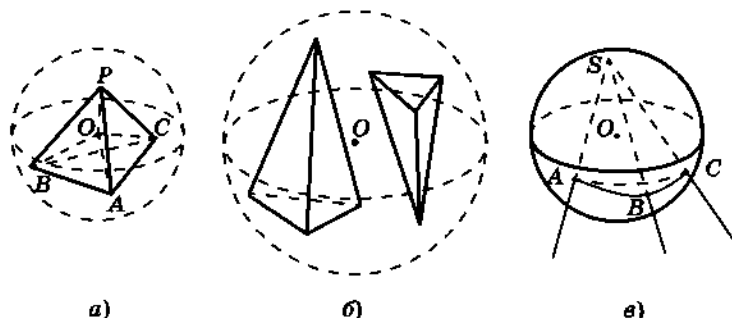


Рис. 55

Трехгранный угол $SABC$ (рис. 55, в) — фигура неограниченная: неограниченны его ребра SA , SB , SC и грани ASB , BSC , CSA , поэтому не найдется шара, который бы содержал целиком эту фигуру (о трехгранных углах речь пойдет подробнее в § 13).

Таким образом, тетраэдр — связанная ограниченная фигура; объединение двух непересекающихся тетраэдров — ограниченная, но несвязная фигура; объединение тетраэдра и любой его внешней точки есть ограниченная несвязная фигура с одной изолированной точкой; трехгранный угол — связанная, но неограниченная фигура.

Связная фигура, все точки которой внутренние, называется пространственной областью.

Например, шар без ограничивающей его сферы является пространственной областью. Тетраэдр (куб) без его границы — пространственная область.

Объединение ограниченной пространственной области и ее границы называется геометрическим телом.

Границу тела называют его поверхностью и говорят, что поверхность тела ограничивает это тело.

Примерами геометрических тел могут служить фигуры, изображенные на рисунках 50, а; 51 а, б; 52, а; 53; 54. Не являются телами объединение двух тетраэдров (см. рис. 52, б) (эта фигура несвязна), трехгранный угол (неограниченная фигура).

Таким образом, геометрическое тело — это связанная замкнутая фигура, т. е. фигура в пространстве, обладающая следующими свойствами: 1) у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить линией, которая целиком состоит из внутренних точек; 2) фигура содержит свою границу, и эта граница совпадает с границей множества всех внутренних точек фигуры.

9.2. Многогранник и его элементы

Многогранник — геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников.

(Понятие многоугольника дано и изучено в планиметрии.)

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются **гранями многогранника**. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно **ребрами** и **вершинами многогранника**.

Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной его грани, называется **диагональю многогранника**. Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многогранника, лежащие в одной его грани, называется **диагональю этой грани**. Угол многоугольника, являющегося гранью многогранника, называется его **плоским углом** (при соответствующей вершине). Грани многогранника, имеющие общее ребро, называются **соседними гранями**. Двугранный угол, образованный плоскостями соседних граней многогранника и содержащий данный многогранник, называется **двугранным углом многогранника при данном его ребре**.

Например, отрезки CE , CD_1 — диагонали граней; CA_1 , CE_1 — диагонали многогранника; $\angle APB$ — плоский угол при вершине P (рис. 56, а); плоскости граней ABP и $ABCD$ образуют двугранный угол при ребре AB , а плоскости граней ABP , BSP и $ABCD$ — трехгранный угол при вершине B (рис. 56). Многогранник, изображенный на рисунке 56, а, диагоналей не имеет, а на рисунке 56, б — имеет 10 диагоналей.

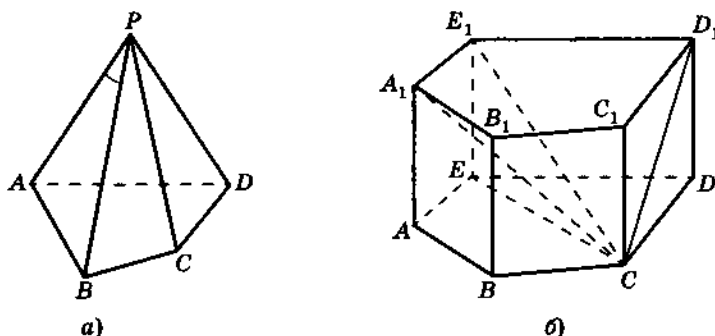
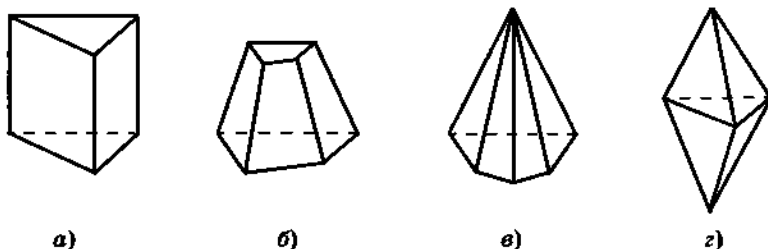


Рис. 56



$V=6, P=9, G=5$ $V=8, P=12, G=6$ $V=6, P=10, G=6$ $V=5, P=9, G=6$

Рис. 57

Многогранники могут быть как выпуклыми (см. рис. 51, а; 53), так и невыпуклыми (см. рис. 51, б; 52, а).

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только выпуклые многогранники.

Пусть M — выпуклый многогранник, у которого V — число вершин, P — число ребер, G — число граней.

Число $V - P + G$ называется *эйлеровой характеристикой* многогранника M .

На рисунке 57 изображены многогранники с различными значениями V, P, G , но для каждого из этих многогранников число $V - P + G$ равно 2, т. е. $V - P + G = 2$. Значит, эйлерова характеристика каждого из них равна 2.

Это замечательное свойство, выражающее зависимость между числом вершин V , числом ребер P и числом граней G любого выпуклого многогранника, впервые было установлено французским философом, физиком и математиком *Рене Декартом* (1596—1620) и позднее (в 1752 г.) заново доказано великим математиком, физиком и астрономом *Леонардом Эйлером* (1707—1783), который родился в Швейцарии, а в 1727—1741 гг. и в 1766—1783 гг. работал в России, был членом Петербургской Академии наук.

Теорема 9 (теорема Декарта—Эйлера для выпуклого многогранника). Для любого выпуклого многогранника сумма числа вершин V и числа граней G на две единицы больше числа его ребер P , т. е. справедлива формула $V - P + G = 2$.

Примем эту теорему без доказательства.

9.3. Развертка

Из определения многогранника следует, что его поверхностью является фигура, составленная из конечного числа многоугольников, которые прикладываются друг к другу равными сторонами, и каждая сторона любого из этих многоугольников — граней многогранника — является общей для некоторых двух и только двух из них. Такую фигуру называют **замкнутой многогранной поверхностью**.

Иногда поверхность многогранника (замкнутую многогранную поверхность) также называют **многогранником**. Это делают и тогда, когда из бумаги или картона склеивают модели куба, пирамиды и других многогранников. Разумеется, из бумаги склеивают куб — не тело, а куб — многогранную поверхность.

Если модель многогранника, изготовленную из картона, разрезать по некоторым ребрам и развернуть на плоскости, то получим многоугольник, который называют **разверткой данного многогранника** (эту фигуру также называют **разверткой поверхности данного многогранника**).

Из разверток многогранников склеивают модели этих многогранников. На рисунке 58 изображены развертки правильного тетраэдра $PABC$ (см. рис. 58, а), куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 58, б), правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ (см. рис. 58, в).

Развертка многогранника — замкнутой многогранной поверхности — представляет собой объединение конечного

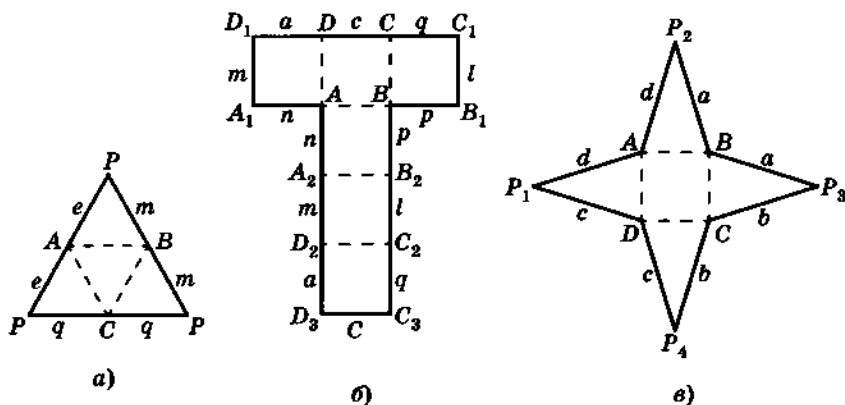


Рис. 58

числа многоугольников, соответственно равных граням этого многогранника, вместе с указанием того, какие стороны и какие вершины многоугольников изображают одни и те же ребра и вершины данного многогранника, и поэтому соответственно должны склеиваться друг с другом. При этом склеивание двух отрезков (равных сторон многоугольников развертки) означает установление между их точками такого соответствия, при котором сохраняются расстояния (склеиваемые части отрезков имеют равные длины), и соответствующие точки отрезков (сторон многоугольников), склеивая, отождествляют (считают за одну точку развертки, а следовательно, за одну точку данного многогранника).

Многоугольники, составляющие развертку многогранника, называются *гранями развертки*, стороны этих многоугольников называются *ребрами развертки*, и склеиваемые стороны многоугольников считаются за одно ребро развертки. Вершины многоугольников называются *вершинами развертки*, и склеиваемые вершины многоугольников считаются за одну вершину развертки.

Отождествление (склеивание) вершин развертки происходит при отождествлении (склеивании) ее ребер, так как вершины являются концами этих ребер. Например, на рисунке 58, а вершины P_1, P_2, P_3, P_4 развертки правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ отождествляются (склеиваются) в одну вершину P модели этой пирамиды следующим образом: вершина P_1 отождествляется с вершиной P_2 при склеивании ребер d, d ; P_2 отождествляется с P_3 при склеивании ребер a, a ; аналогично P_3 отождествляется с P_4 , а P_4 — с P_1 при склеивании ребер соответственно b, b и c, c . Таким образом, все вершины P_1, P_2, P_3, P_4 развертки отождествляются и склеиваются в одну вершину P пирамиды $PABCD$.

Иногда вершины некоторых многоугольников (граней) развертки отождествляются в одну вершину посредством последовательного склеивания нескольких сторон (ребер) других многоугольников (граней) развертки. Например, на рисунке 58, б вершины C_1 и C_2 отождествляются (получается вершина C_1 куба) через последовательное склеивание сторон (ребер) p, p и l, l , а вершина D_1 куба получается при отождествлении вершин D_1 и D_3 развертки посредством последовательного склеивания сторон (ребер) n, n ; m, m и a, a .

Из сказанного следует, что, имея многогранник, мы всегда можем построить его развертку. На рисунке 59, а изображен многогранник $PABCDQ$ (этот многогранник называется *бипирамидой*), а на рисунке 59, б — развертка этого многогранника.

Вместе с тем возникает вопрос: имея набор многоугольников и алгоритм (порядок) склеивания их сторон и вершин, получим ли мы замкнутый выпуклый многогранник в результате склеивания соответствующих сторон и вершин этих многоугольников?

Оказывается, что для того чтобы из развертки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник, необходимо выполнение следующих трех условий:

1. Условие замкнутости: каждая сторона каждого многоугольника развертки должна склеиваться еще с какой-либо стороной одного и только одного другого многоугольника (называемого *смежным* с первым многоугольником).

2. «Условие Эйлера»: если развертка состоит из Γ граней, B вершин и P ребер, то должно выполняться условие $B - P + \Gamma = 2$. При этом Γ — число многоугольников (граней) на развертке, B — число вершин многоугольников развертки, соответствующих различным вершинам многогранника, P — число сторон многоугольников развертки, соответствующих различным ребрам многогранника.

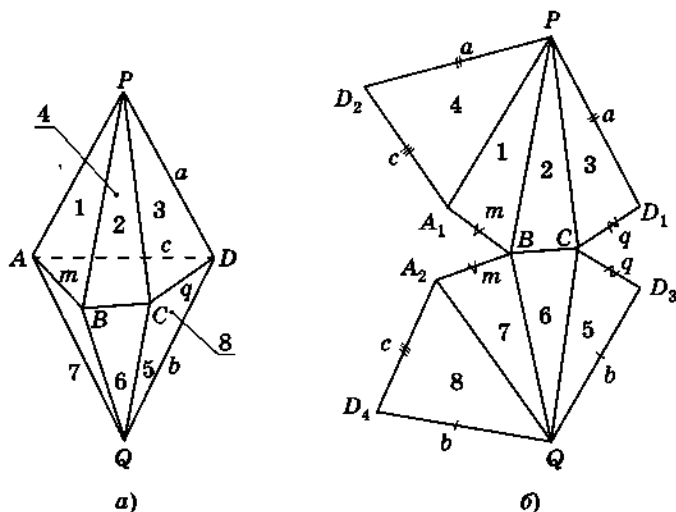


Рис. 59

3. Условие выпуклости: сумма внутренних углов многоугольников (граней) при каждой из вершин развертки должна быть меньше 360° .

■ Следует заметить, что иногда данный на плоскости набор (объединение) многоугольников удовлетворяет всем трем необходимым требованиям (условиям Эйлера, замкнутости и выпуклости), предъявляемым к развертке, чтобы из нее можно было склеить выпуклый многогранник, но многогранник, тем не менее, из данной развертки получить (склеить) невозможно.

Например, на рисунке 60, а изображено объединение квадрата и четырех треугольников, два из которых — прямоугольные. Выполнимость условий Эйлера, замкнутости и выпуклости очевидна для данного объединения многоугольников, однако это объединение многоугольников не может быть разверткой какого-либо многогранника (пятигранника). Действительно, после склеивания вершин P_1 и P_2 (склеиваются стороны a и a) получаем (рис. 60, б): $PA \perp CB$, $PA \perp CD \Rightarrow PA \perp (BCD)$. Кроме того, $AB \perp CB$, значит, по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp PB$, т. е. $\angle ABP = 90^\circ$, и дальнейшее склеивание сторон b и b невозможно, так как $\angle ABP_3 \neq 90^\circ$ (см. рис. 60, а).

Но интересен тот факт, что если в том же объединении многоугольников (см. рис. 60, а) квадрат $ABCD$ разбить его диаго-

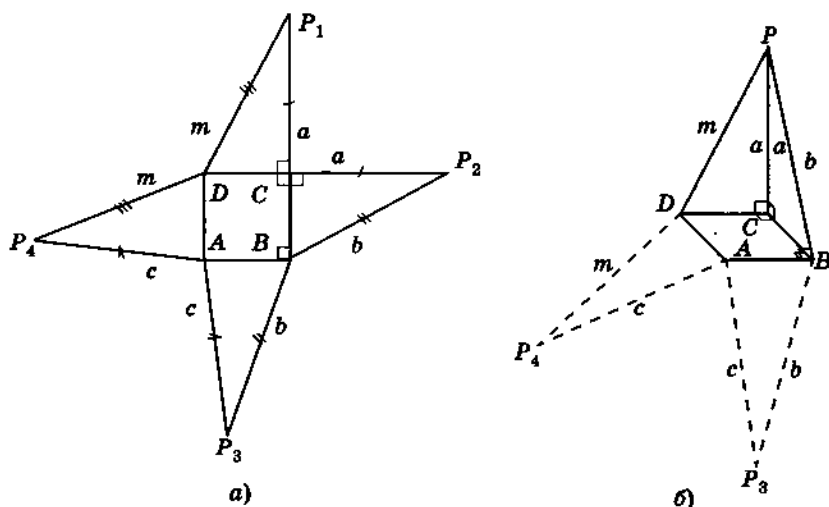


Рис. 60

налью BD на два треугольника ABD и BCD (рис. 61, а), после чего «перегнуть» этот квадрат по диагонали BD , то получим шестигранную развертку некоторого выпуклого многогранника (шестигранника) (рис. 61, б), для которого треугольники ABD и BCD служат гранями, не лежащими в одной плоскости. ■■

9.4. Свойства выпуклых многогранников

Выпуклые многогранники обладают рядом свойств.

1. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Доказательство. Пусть M — данный выпуклый многогранник, Q — одна (любая) из его граней, α — плоскость, содержащая грань Q (α — плоскость грани Q).

Методом от противного докажем, что многогранник M лежит по одну сторону от плоскости α .

Допустим, что многогранник M не лежит по одну сторону от плоскости α . Тогда найдутся такие две точки A и B этого многогранника, которые лежат по разные стороны от плоскости α (рис. 62). Соединяя точки A и B со всеми точками грани Q , мы получаем многогранник M_1 (многогранник M_1 состоит из

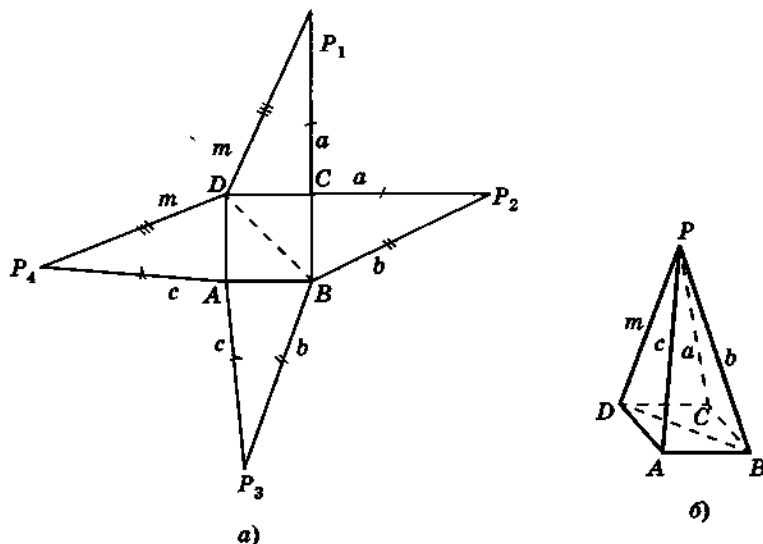


Рис. 61

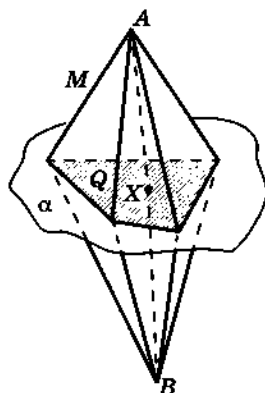


Рис. 62

двух пирамид с вершинами A и B и общим основанием Q . Эти пирамиды образованы отрезками AX и BX , где X — любая точка грани Q).

Так как данный многогранник M выпуклый, то точки отрезков AX и BX , а следовательно, все точки многогранника M_1 являются внутренними точками многогранника M . Поэтому многогранник M_1 содержится в многограннике M : $M_1 \subset M$. Это, в свою очередь, означает, что внутренние точки многоугольника Q лежат внутри многогранника M_1 . Но так как $M_1 \subset M$, то все точки многоугольника

Q являются внутренними точками и данного многогранника M , что невозможно, так как многоугольник Q — грань данного многогранника M , а каждая точка грани многогранника M является его граничной точкой. Пришли к противоречию. Значит, допущение неверно, и многогранник M лежит по одну сторону от плоскости α , что и требовалось доказать. ▼

Верно и обратное утверждение.

Если многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то он выпуклый.

Доказательство. Пусть многогранник M лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Допустим, что он не выпуклый. Тогда найдутся такие две точки A и B многогранника M , что на отрезке AB есть точка X , не принадлежащая M (рис. 63). Так как $A \in M$, $X \notin M$, а многогранник M лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то точки A и X разделены плоскостью, по крайней мере, одной из граней многогранника M . Обозначим эту плоскость α .

Разделенность точек $A \in M$ и $X \notin M$ плоскостью α означает, что прямая AX пересекает плоскость α в некоторой точке C отрезка AX , и многогранник M целиком лежит в том полупространстве относительно плоскости α , которое содержит точку A . Это полупространство не содержит точку X , которая лежит

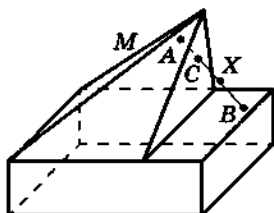


Рис. 63

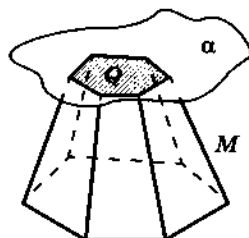


Рис. 64

между точками A и B , значит, оно не должно содержать и точку B . Но, с другой стороны, точка B — точка многогранника M , поэтому (по условию теоремы) она должна лежать с точкой A в одном полупространстве относительно плоскости α . Пришли к противоречию, которое и доказывает утверждение о том, что многогранник M — выпуклый.

2. Каждая грань выпуклого многогранника является выпуклым многоугольником.

Доказательство. Пусть Q — грань выпуклого многогранника M , α — плоскость этой грани (рис. 64). Так как многогранник M выпуклый, то он целиком расположен в одном полупространстве относительно плоскости α , и общие точки плоскости α и многогранника M образуют грань Q , т. е. пересечением многогранника M и плоскости α является многоугольник Q . Вследствие того, что пересечением двух выпуклых фигур является выпуклая фигура, приходим к выводу: грань Q многогранника M — выпуклый многоугольник, что и требовалось доказать. ▽

Теорема 10. Плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через внутреннюю точку A многогранника M . Пересечением выпуклых фигур M и α является некоторая выпуклая фигура $Q = M \cap \alpha$ (рис. 65), содержащая внутренние точки (A — внутренняя точка многогранника M , а следовательно, и внутренняя точка фигуры Q , лежащая в плоскости α).

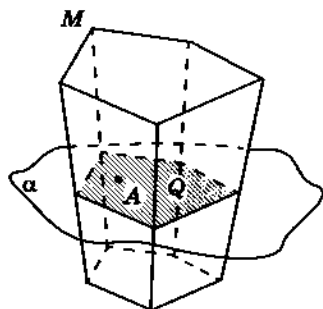


Рис. 65

Граница многогранника M представляет собой объединение конечного числа выпуклых многоугольников. Следовательно, пересечением секущей плоскости α с гранями многогранника является конечное число отрезков, образующих границу фигуры Q .

Таким образом, получаем, что пересечением выпуклого многогранника M и плоскости α является выпуклая фигура Q , границей которой является объединение конечного числа отрезков. Следовательно, Q — выпуклый многоугольник. Теорема доказана. ▼

§ 10. Объемы многогранников

10.1. О понятии объема тела

Из курса планиметрии известно, что каждому многоугольнику M ставится в соответствие положительное число $S(M)$, называемое площадью этого многоугольника. При этом выполняются условия: 1) равные многоугольники имеют равные площади; 2) если многоугольник является объединением некоторых многоугольников, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, то площадь данного многоугольника равна сумме площадей составляющих его многоугольников; 3) площадь единичного квадрата равна единице.

Для измерения площадей обычно используют квадрат, сторона которого равна единице длины e . Такой квадрат называется единичным, а его площадь, равную e^2 , принимают за единицу измерения площадей. Тогда площадь S любого многоугольника можно представить в виде $S = se^2$, где s — численное значение площади при данной единице измерения.

С задачей вычисления объемов некоторых тел вы уже знакомы в предшествующем курсе геометрии. Теперь мы рассмотрим общую задачу о вычислении объемов геометрических тел, аналогичную задаче о вычислении площадей в планиметрии.

Будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. В качестве единицы измерения объемов принимают объем куба с ребром длины e (e — единица измерения длин отрезков), который обозначают e^3 . Тогда объем V любого многогранника выражается через эту единицу измерения в виде $V = ve^3$, где v — численное значение объема при данной единице измерения.

Объем единичного куба с ребром 1 см называют кубическим сантиметром и обозначают см^3 . Аналогично определяются кубический дециметр (дм^3), кубический метр (м^3) и т. д.

При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объемов и ее частей содержится в данном теле. Так как число, выражающее объем тела, зависит от выбранной единицы измерения, то единица измерения объемов (см^3 , дм^3 и т. д.) пишется после этого числа. Например, если единица измерения объемов — м^3 , а численное значение объема тела равно 24, то пишут $V = 24 \text{ м}^3$.

Таким образом, *задача измерения объемов тел (в частности, многогранников) состоит в том, чтобы при выбранной единице измерения каждому телу T (многограннику M) поставить в соответствие определенное положительное число $V(T)$ ($V(M)$), называемое **объемом тела T** (многогранника M), так, что выполняются следующие условия.*

1) Объем куба E , ребро которого равно единице измерения длин отрезков, равен единице и принимается за единицу измерения объемов: $V(E) = 1$.

2) Если тело T является объединением нескольких тел, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, то объем данного тела равен сумме объемов составляющих его тел (*свойство аддитивности*).

3) Равные тела имеют равные объемы (*свойство инвариантности*).

Из свойства 2 вытекает следующее свойство объемов: если тело с объемом V_1 содержится в теле с объемом V_2 , то $V_1 \leq V_2$. Это свойство называется *свойством монотонности объемов*.

Определение. Тела, имеющие равные объемы, называются **равновеликими**.

Два тела называют *равносоставленными*, если, определенным образом разбив одно из них на конечное число частей, можно (располагая эти части в некотором порядке) составить из них второе тело.

Из свойств объемов следует, что *равносоставленные тела равновелики*. Обратное не всегда верно.

Точное обоснование формул для вычисления площадей многих фигур в планиметрии весьма сложно. Например, обоснование такого простого, казалось бы, факта, что площадь прямоугольника со сторонами a и b равна $a \cdot b$, требует знаний, выходящих за рамки школьной программы. Еще большие трудности вызывает строгое обоснование вывода формул для вычисления объемов тел в стереометрии.

Однако вопрос о выводе формул для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел в пространстве может быть решен, если принять без доказательства следующие утверждения:

- если при пересечении двух плоских фигур прямыми, параллельными одной и той же прямой, в сечениях этих фигур любой из прямых получаются равные между собой отрезки, то площади данных фигур равны;
- если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны.

Эти утверждения обосновал замечательный итальянский математик *Бонавентура Кавальери* (1598—1647), по имени которого они носят название принципа Кавальери.

В нашем курсе мы будем выводиться формулы объемов тел, основываясь на еще более сильном (и интуитивно понятном) утверждении:

- если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются фигуры, площади которых относятся как $m : n$, то объемы данных тел относятся как $m : n$.

10.2. Объем прямоугольного параллелепипеда

Сначала найдем объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами основания a , b и высотой 1.

Расположим единичный куб и данный параллелепипед так, чтобы их основания находились в одной плоскости, а сами

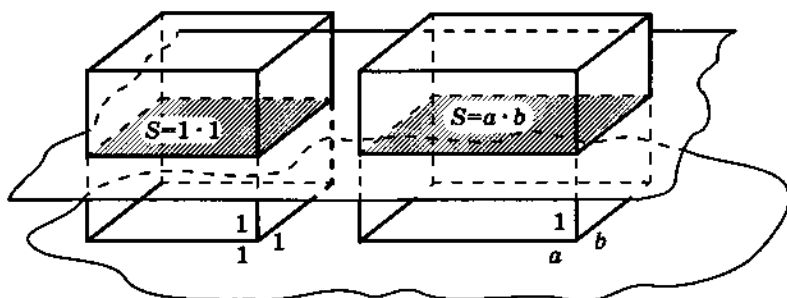


Рис. 66

многогранники были расположены по одну сторону от этой плоскости (рис. 66). Тогда любая плоскость, параллельная плоскости оснований этих многогранников и пересекающая куб, пересекает также и прямоугольный параллелепипед, причем площади сечений, образованных при пересечении обоих многогранников, относятся как $1 : (a \cdot b)$. Это означает, что их объемы также относятся как $1 : (a \cdot b)$. Следовательно, объем V прямоугольного параллелепипеда с измерениями $1, a, b$ равен $a \cdot b$, т. е. $V = a \cdot b$.

Теперь найдем объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c . Для этого прямоугольный параллелепипед с измерениями $1, a, b$ и данный параллелепипед с измерениями a, b, c расположим так, чтобы грань со сторонами 1 и a первого параллелепипеда и грань со сторонами c и a второго параллелепипеда лежали в одной плоскости, и оба параллелепипеда находились по одну сторону от этой плоскости (рис. 67). Тогда любая плоскость, параллельная данной плоскости оснований параллелепипедов и пересекающая первый параллелепипед, пересекает также и второй параллелепипед,

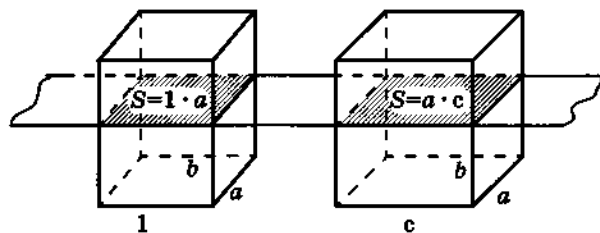


Рис. 67

причем площади сечений, образованных при пересечении обоих тел, относятся как $\frac{1 \cdot a}{c \cdot a} = \frac{1}{c}$. Это означает, что их объемы также относятся как $1 : c$. А так как объем параллелепипеда с измерениями $1, a, b$ равен ab , то объем V прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c находится из соотношения $1 : c = (a \cdot b) : V$ и равен $a \cdot b \cdot c$.

Таким образом, объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Для доказательства достаточно грань параллелепипеда с ребрами a и b принять за его основание, а ребро c — за высоту h (рис. 68). Тогда $S_{\text{осн}} = a \cdot b$ и

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Так как у куба все ребра равны, то объем куба равен кубу длины его ребра a :

$$V = a^3.$$

§ 11. Призма

11.1. Определение призмы. Виды призм

Рассмотрим два равных выпуклых многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, которые расположены в параллельных плоскостях α и α_1 так, что $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $DE \parallel D_1E_1$, $EA \parallel E_1A_1$ (рис. 69).

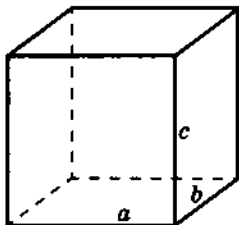


Рис. 68

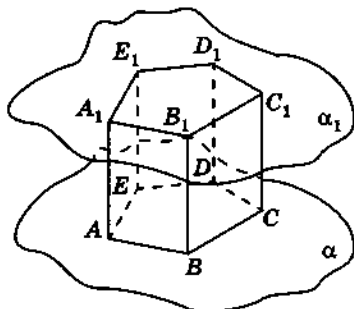


Рис. 69

Проведем отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 . Тогда четырехугольники ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DEE_1D_1 , EAA_1E_1 — параллелограммы (почему?).

Многогранная поверхность $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, гранями которой являются данные многоугольники $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$ и полученные параллелограммы, является замкнутой. Тело, которое ограничивает эта поверхность, называют **призмой** и обозначают $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ называют **основаниями** этой призмы, параллелограммы ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DEE_1D_1 , EAA_1E_1 — **боковыми гранями призмы**, а отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 — ее **боковыми ребрами**.

Определение. Призмой называется многогранник, две грани которого, называемые основаниями призмы, — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани — параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.

Эти остальные грани называются **боковыми гранями призмы**, а их объединение — **боковой поверхностью призмы**. Стороны боковых граней, не лежащие в плоскостях оснований, называются **боковыми ребрами призмы**.

Объединение боковой поверхности призмы и двух ее оснований называется **полной поверхностью призмы**.

Призма называется ***n*-угольной**, если ее основание — простой *n*-угольник (рис. 70). Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований, называется **прямой**

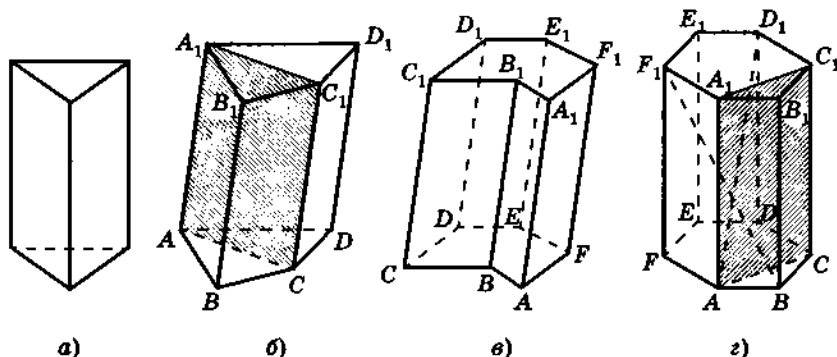


Рис. 70

призмой (см. рис. 70, а, г). В противном случае призма называется *наклонной* (см. рис. 70, б, в). *Правильной* призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник (см. рис. 70, а).

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не лежащие в одной грани, называется *диагональю призмы*. На рисунке 70, г отрезки BF_1 и AD_1 — диагонали шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$.

У n -угольной призмы $2 \cdot n$ вершин, $3 \cdot n$ ребер, $n + 2$ граней и $n(n - 3)$ диагоналей.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания призмы к плоскости другого основания, называется *высотой призмы*. Высотой призмы называют также и длину этого перпендикуляра.

Так как боковые ребра прямой призмы перпендикулярны ее основаниям, то высота прямой призмы равна ее боковому ребру. Плоскость, проходящая через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется *диагональной плоскостью*, а сечение призмы этой плоскостью — ее *диагональным сечением*. На рисунке 70, б, г четырехугольники $ACC_1 A_1$ — диагональные сечения призмы. Найдите на рисунке 70, б, в, г другие диагональные сечения призмы.

Призма является выпуклым многогранником (см. рис. 70, а, б, г), если ее основание — выпуклый многоугольник, и невыпуклым, если основание этой призмы — невыпуклый многоугольник (см. рис. 70, в).

Мы будем изучать, как правило, выпуклые призмы, поэтому слово «выпуклые» будем опускать.

■ **ЗАДАЧА (2.027).** Докажите, что если в правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали $B_1 D$ и BD_1 взаимно перпендикулярны, то диагонали $A_1 C$ и $B_1 D$ образуют угол в 60° .

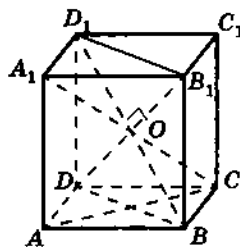


Рис. 71

Решение. Боковые ребра правильной призмы перпендикулярны основанию, поэтому $BDD_1 B_1$ — прямоугольник (рис. 71). У него диагонали $B_1 D$ и BD_1 взаимно перпендикулярны. Значит, $BDD_1 B_1$ — квадрат, откуда $BB_1 = BD$.

Пусть $BB_1 = BD = a$. Тогда $B_1 D = D_1 B = A_1 C = a\sqrt{2}$.

Если O — точка пересечения диагоналей призмы, то в квадрате BDD_1B_1 находим $B_1O = D_1O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, $\triangle ABC : AC = a \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, в $\triangle A_1OB_1$ имеем $A_1O = B_1O = AB = A_1B_1$, откуда $\triangle A_1OB_1$ — правильный, поэтому $\angle A_1OB_1 = 60^\circ$. Это означает: $\angle (A_1C; B_1D) = 60^\circ$, что и требовалось доказать.

■ ЗАДАЧА (2.034). В правильной треугольной призме со стороной основания a и высотой H через сторону нижнего основания под углом φ к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

Решение. Пусть секущая плоскость α проходит через сторону BC основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. В зависимости от величины угла φ эта плоскость может пересекать боковое ребро AA_1 (рис. 72) или не пересекать его (в этом случае плоскость α пересекает прямую, проходящую через ребро AA_1 (рис. 73).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. $\alpha \cap AA_1 = K$, где K — точка ребра AA_1 (см. рис. 72). Пусть точка E — середина стороны BC . Тогда $AE \perp BC \Rightarrow KE \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Значит, $\angle AEK = \varphi$.

Если секущая плоскость проходит через вершину A_1 , то сечением призмы является равнобедренный (почему?) $\triangle BA_1C$ и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AA_1}{AE}$. Значит, при условии $\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{AA_1}{AE} = \frac{2H}{a\sqrt{3}}$ сечение

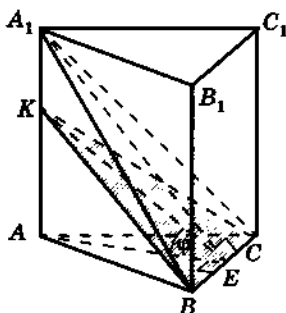


Рис. 72

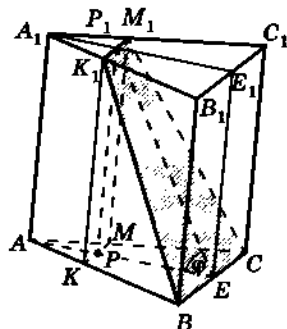


Рис. 73

призмы — равнобедренный $\triangle BCK$ ($AK \leq AA_1$). Найдем площадь этого треугольника.

Так как $\triangle ABC$ — ортогональная проекция треугольника BCK , то $S_{\triangle BCK} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi}$.

2. $\operatorname{tg} \varphi > \frac{2H}{a\sqrt{3}}$. В этом случае секущая плоскость α пересекает верхнее основание призмы по отрезку $K_1M_1 \parallel BC$ (рис. 73). Сечением призмы является равнобедренная (почему?) трапеция BK_1M_1C . Обозначим $P_1 = A_1E_1 \cap K_1M_1$, где E_1 — середина B_1C_1 . Тогда $P_1E \perp BC$, поэтому $\angle AEP_1 = \varphi$. Проведем отрезки K_1K , P_1P , M_1M параллельно AA_1 , где $K \in AB$, $P \in AE$, $M \in AC$. Отсюда равнобедренная (почему?) трапеция $BKMC$ — ортогональная проекция сечения BK_1M_1C на плоскость нижнего основания.

Значит, $S_{BK_1M_1C} = \frac{S_{BKMC}}{\cos \varphi}$; $S_{BKMC} = \frac{KM + BC}{2} \cdot PE$. Так как $P_1P \parallel A_1A$, то $P_1P = A_1A = H$.

Тогда

в $\triangle PP_1E$ ($\angle P = 90^\circ$): $PE = P_1E \cdot \cos \varphi = H \cdot \operatorname{ctg} \varphi$;

в $\triangle ACB$: $AP = AE - PE = \frac{a\sqrt{3}}{2} - H \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a\sqrt{3} - 2H \operatorname{ctg} \varphi}{2}$.

Из параллельностей $KM \parallel K_1M_1$, $K_1M_1 \parallel BC$ следует $KM \parallel BC$, поэтому $\triangle AKM \sim \triangle ABC$. Следовательно, $KM : BC = AP : AE$,

откуда $KM = \frac{BC \cdot AP}{AE} = \frac{a(a\sqrt{3} - 2H \operatorname{ctg} \varphi)}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a - 2\sqrt{3}H \operatorname{ctg} \varphi}{3}$.

Получаем:

$$\begin{aligned} S_{BKMC} &= \frac{\frac{3a - 2\sqrt{3}H \operatorname{ctg} \varphi}{3} + a}{2} \cdot H \operatorname{ctg} \varphi = \\ &= \frac{(3a - \sqrt{3}H \operatorname{ctg} \varphi) \cdot H \operatorname{ctg} \varphi}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{BK_1M_1C} = \frac{(3a - \sqrt{3}H \operatorname{ctg} \varphi) \cdot H \operatorname{ctg} \varphi}{3 \cos \varphi} = \frac{H(3a - \sqrt{3}H \operatorname{ctg} \varphi)}{3 \sin \varphi}.$$

Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi}$; $\frac{H(3a - \sqrt{3}H \operatorname{ctg} \varphi)}{3 \sin \varphi}$.

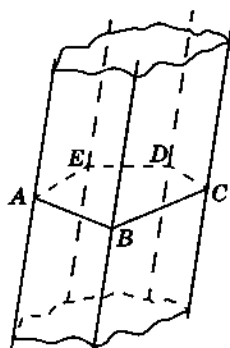
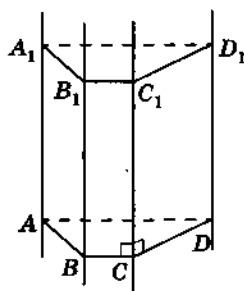
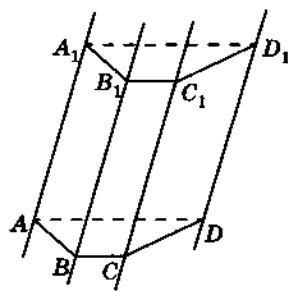


Рис. 74



а)



б)

Рис. 75

Поверхность, образованная движением прямой в пространстве так, что эта прямая остается параллельной самой себе и пересекает данную плоскую ломаную линию, называется **призматической поверхностью** (рис. 74). Подвижная прямая называется **образующей призматической поверхности**, а данная ломаная — ее **направляющей**. Тело, ограниченное призматической поверхностью, называется **призматическим телом**. Образующие призматической поверхности, проходящие через вершины направляющей, называются **ребрами призматической поверхности** (призматического тела).

Часть призматического тела (рис. 75), заключенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими все его грани и ребра, представляет собой призму. Эта призма является прямой (см. рис. 75, а) или наклонной (см. рис. 75, б), если секущие плоскости соответственно перпендикулярны или не перпендикулярны боковым ребрам призматического тела.

11.2. Боковая и полная поверхности призмы

Сумма площадей всех боковых граней призмы называется **площадью ее боковой поверхности** и обозначается $S_{\text{бок}}$. Сумма площадей всех граней призмы называется **площадью ее полной поверхности** и обозначается $S_{\text{полн}}$.

Так как основания призмы — равные многоугольники, а площади равных многоугольников равны, то $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$, где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы.

Докажем теоремы о площадях боковых поверхностей прямой и наклонной призм.

Теорема 11. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на боковое ребро.

Доказательство. Каждая боковая грань прямой призмы — прямоугольник (почему?), основанием которого является соответствующая сторона основания призмы, а высотой — боковое ребро h призмы (рис. 76).

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей всех ее боковых граней — прямоугольников, т. е. сумме произведений длин сторон основания призмы на боковое ребро h . Из рисунка 76 видно, что эта сумма произведений имеет вид $AB \cdot h + BC \cdot h + CD \cdot h + DE \cdot h + EA \cdot h$. Вынося общий множитель h за скобки, получим в скобках сумму длин сторон основания призмы, т. е. периметр P основания:

$$h \cdot (AB + BC + CD + DE + EA) = h \cdot P.$$

Тогда $S_{\text{бок}} = P \cdot h$. Теорема доказана. ▽

■ **ЗАДАЧА (2.050).** Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$, у которой $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площадь диагонального сечения призмы равна 180 см^2 . Найдите: а) площадь полной поверхности призмы; б) площадь сечения AB_1C_1D (рис. 77).

Решение. а) $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$, $S_{\text{осн}} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH$, где CH — высота трапеции $ABCD$ ($CH \parallel EK$, E и K — середины оснований этой трапеции).

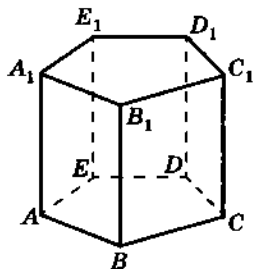


Рис. 76

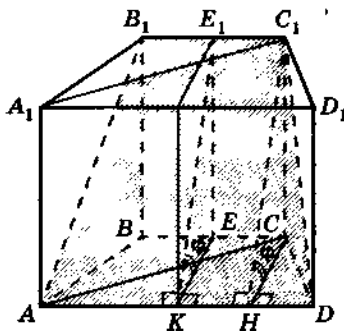


Рис. 77

Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $DH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{21 - 11}{2} = 5$. Тогда $\triangle CDH (\angle H = 90^\circ)$: $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$. Итак, $S_{\text{осн}} = \frac{11 + 21}{2} \cdot 12 = 192$.

Для вычисления $S_{\text{бок}}$ найдем:

$$AH = AD - DH = 21 - 5 = 16.$$

$$\triangle ACH (\angle H = 90^\circ): AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{256 + 144} = 20.$$

Поскольку данная призма прямая, то $AA_1 \perp (ABC)$, следовательно, четырехугольник ACC_1A_1 — прямоугольник, а $S_{\text{бок}} = P \cdot CC_1$, где P — периметр основания.

Так как $S_{ACC_1A_1} = 180 = AC \cdot CC_1$, то $CC_1 = \frac{180}{AC} = 9$. Поэтому $S_{\text{бок}} = (2AB + AD + BC) \cdot CC_1 = (2 \cdot 13 + 21 + 11) \cdot 9 = 522$. Тогда $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 522 + 2 \cdot 192 = 906 \text{ (см}^2\text{)}$.

б) Из равенства $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ следует $AB_1 = DC_1$. Значит, AB_1C_1D — равнобедренная трапеция. Если E, K, E_1 — середины оснований трапеций $ABCD$ и AB_1C_1D , то $EK \perp AD$, $E_1K \perp AD$ и $\angle EKE_1 = \varphi$ — угол, образованный плоскостью сечения AB_1C_1D и плоскостью основания призмы. Причем трапеция $ABCD$ является ортогональной проекцией трапеции AB_1C_1D . Поэтому $S_{ABCD} = S_{AB_1C_1D} \cdot \cos \varphi$, откуда $S_{AB_1C_1D} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \varphi}$. Находим $\cos \varphi$.

$$\begin{aligned} \triangle EKE_1: \operatorname{tg} \varphi &= \frac{EE_1}{EK} = \frac{CC_1}{CH} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \\ &= \frac{4}{5} \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } S_{AB_1C_1D} = 192 : \frac{4}{5} = 240 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: а) 906 см^2 ; б) 240 см^2 .

Пусть теперь дана наклонная призма (рис. 78). Найдем площадь ее боковой поверхности.

Если плоскость α , проходящая через точку M бокового ребра AA_1 перпендикулярно этому ребру, пересекает каждое бо-

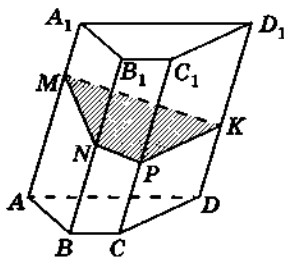


Рис. 78

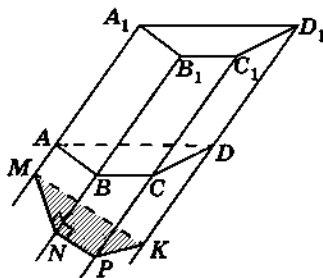


Рис. 79

ковое ребро призмы, то многоугольник MNP , полученный при пересечении данной призмы и плоскости α , называется **перпендикулярным сечением этой призмы**.

Площадь боковой поверхности данной призмы равна сумме площадей ее боковых граней — параллелограммов. Принимая боковые ребра призмы за основания этих параллелограммов, а соответствующие стороны перпендикулярного сечения — за их высоты, получим: $S_{бок} = b \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n)$, где b — длина бокового ребра призмы, а $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ — длины высот боковых граней, являющихся сторонами перпендикулярного сечения. Поэтому $S_{бок} = P_{перп.сеч} \cdot b$.

Если не существует плоскости, перпендикулярной боковым ребрам наклонной призмы и пересекающей каждое из них, то выберем точку M на продолжении ребра AA_1 и проведем через нее плоскость, перпендикулярную прямой AA_1 . Пересечением этой плоскости и призматической поверхности, полученной при продолжении боковых ребер и граней данной призмы, является некоторый многоугольник, который назовем **перпендикулярным сечением призматической поверхности** (рис. 79). Стороны этого многоугольника также являются высотами боковых граней призмы, т. е. $S_{бок} = P_{перп.сеч} \cdot b$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 12. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро.

11.3. Объем призмы

Рассмотрим призму с площадью основания S и высотой h и прямоугольный параллелепипед также с площадью основания S и высотой h .

Расположим призму и параллелепипед так, чтобы их основания лежали в одной плоскости и оба многогранника находились по одну сторону от этой плоскости (рис. 80). Тогда каждая плоскость, параллельная плоскости оснований многогранников и пересекающая параллелепипед, пересекает также и призму. Причем площади сечений призмы и параллелепипеда, образованных при их пересечении с соответствующей секущей плоскостью, равны (относятся как 1 : 1). А это означает, что их объемы также относятся как 1 : 1, т. е. объемы призмы и параллелепипеда равны. Так как объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, то и объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 13. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Покажем, что для наклонной призмы ее объем может быть найден еще и как произведение площади перпендикулярного сечения призматической поверхности, соответствующей дан-

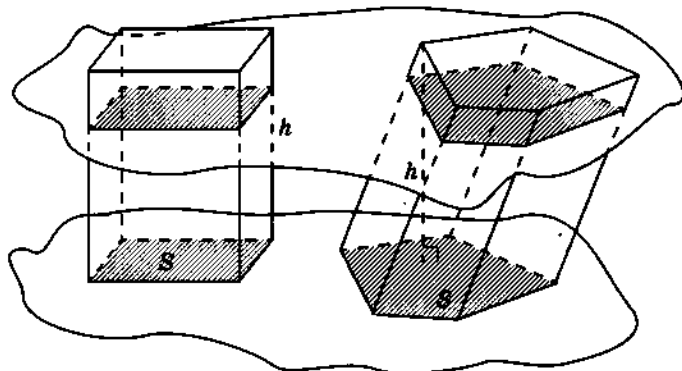


Рис. 80

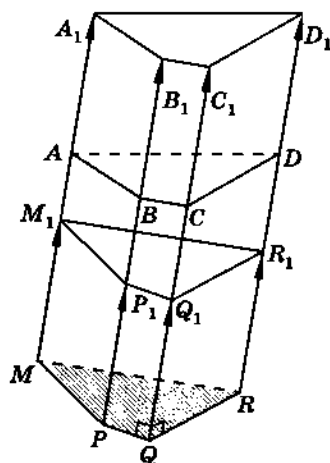


Рис. 81

ной призме, на боковое ребро. Докажем это, применив свойства объемов.

Доказательство. Пусть дана наклонная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 81). Проведем перпендикулярное сечение $MPQR$ призматического тела, которое ограничено призматической поверхностью, полученной при продолжении боковых ребер и граней данной призмы, и рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA_1}$. Этот перенос отображает многогранник $MPQRABCD$ на равный ему (почему?) многогран-

ник $M_1 P_1 Q_1 R_1 A_1 B_1 C_1 D_1$, где $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{RR_1}$. Значит, эти многогранники равновелики и поэтому имеют равные объемы. А так как многогранник $M_1 P_1 Q_1 R_1 ABCD$ является их общей частью, то равновеликими являются также призма $MPQRM_1 P_1 Q_1 R_1$ и данная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, значит, объемы этих призм равны. Но объем V прямой (почему?) призмы $MPQRM_1 P_1 Q_1 R_1$ равен произведению площади ее основания $MPQR$ на высоту, которая равна ребру MM_1 , т. е. $V = S_{MPQR} \cdot MM_1$. Так как $AA_1 = MM_1$ и призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и $MPQRM_1 P_1 Q_1 R_1$ равновелики, то объем V данной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен произведению площади S_{MPQR} сечения $MPQR$ и длины ребра AA_1 :

$$V = S_{MPQR} \cdot AA_1.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 14. Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения призматического тела на боковое ребро.

§ 12. Параллелепипед

12.1. Определение и свойства параллелепипеда

Определение. Призма, основание которой — параллелограмм, называется параллелепипедом (рис. 82).

У параллелепипеда шесть граней и четыре диагонали.

Из определения следует, что у параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими* (противоположными).

Параллельные ребра параллелепипеда, не лежащие в одной грани, называются его *противолежащими* (противоположными) *ребрами*.

Некоторые свойства параллелепипеда аналогичны свойствам параллелограмма.

Рассмотрим диагонали AC_1 и B_1D параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 83).

Так как грани $ABCD$ и $B_1 C_1 CB$ — параллелограммы, то равны и параллельны отрезки AD и BC , а также отрезки BC и $B_1 C_1$. Тогда на основании свойства транзитивности отношений параллельности и равенства отрезки AD и $B_1 C_1$ равны и параллельны. Значит, четырехугольник $AB_1 C_1 D$ — параллелограмм. Диагонали AC_1 и $B_1 D$ параллелепипеда являются диагоналями этого параллелограмма, поэтому в точке O их взаимного пересечения каждая из них делится пополам.

Аналогично доказывается, что диагонали AC_1 и BD_1 , а также диагонали $A_1 C$ и $B_1 D$ пересекаются в точке пересечения делятся пополам. А так как отрезок имеет только одну середи-

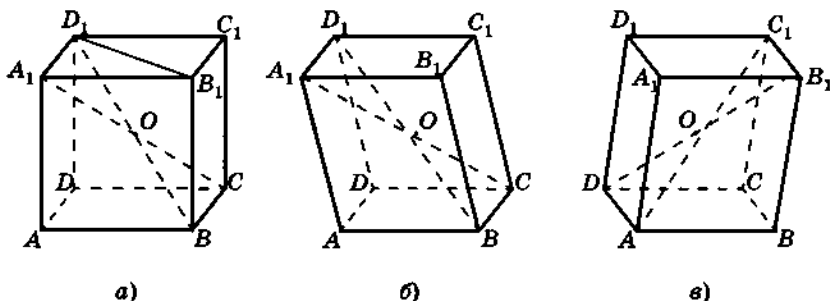


Рис. 82

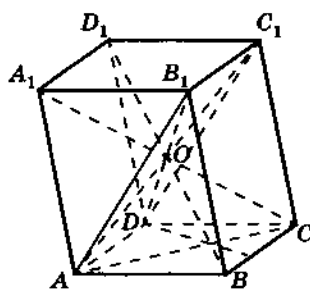


Рис. 83

ну, то все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке O и делятся этой точкой пополам.

Тогда при центральной симметрии относительно точки O концы каждой из диагоналей параллелепипеда отображаются друг на друга, т. е. $Z_O(A) = C_1$, $Z_O(B) = D_1$, $Z_O(C) = A_1$, $Z_O(D) = B_1$, $Z_O(A_1) = C$, $Z_O(B_1) = D$, $Z_O(C_1) = A$, $Z_O(D_1) = B$. Это означает, что ребра параллелепипеда центральной симмет-

рией относительно точки O отображаются на противоположные им ребра, грани — на противоположные им грани. А так как центральная симметрия — движение, при котором прямая и плоскость, не проходящие через центр симметрии, отображаются соответственно на параллельные прямую и плоскость, то как противоположные ребра, так и противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

Кроме того, любая внутренняя точка параллелепипеда при симметрии S_O отображается также на его внутреннюю точку. Следовательно, при центральной симметрии Z_O параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отображается на себя.

Таким образом, параллелепипед обладает следующими свойствами:

диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам;

точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии;

противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

Из сказанного выше следует, что любую грань параллелепипеда можно приять за его основание.

Определение. Параллелепипед называется прямым, если его боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований (см. рис. 82, а), в противном случае параллелепипед называется наклонным (см. рис. 82, б, в).

Из определения следует, что все боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

Определение. Прямой параллелепипед, основание которого — прямоугольник, называется прямоугольным.

Таким образом, все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники (рис. 84). Из сказанного следует, что у прямоугольного параллелепипеда:

- а) ребра, сходящиеся в одной его вершине, попарно взаимно перпендикулярны;
- б) любые две его грани либо параллельны, либо перпендикулярны;
- в) каждое его ребро перпендикулярно тем граням, которые содержат лишь концы этого ребра.

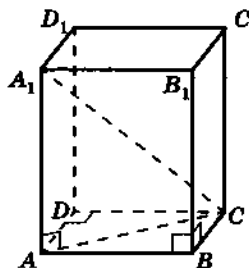


Рис. 84

Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, исходящих из одной его вершины, называются *измерениями прямоугольного параллелепипеда*. У прямоугольного параллелепипеда три измерения.

Теорема 15. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. рис. 84) и найдем квадрат длины его диагонали $A_1 C$.

$$\text{В } \triangle AA_1 C (\angle A = 90^\circ): A_1 C^2 = AC^2 + AA_1^2;$$

$$\text{в } \triangle ADC (\angle D = 90^\circ): AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Учитывая, что $DC = AB$, получаем: $A_1 C^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$. Теорема доказана. ▽

Замечание. Эта теорема является аналогом теоремы Пифагора (для прямоугольного треугольника), поэтому ее иногда называют *пространственной теоремой Пифагора*.

У параллелепипеда есть еще одно метрическое свойство, похожее на свойство параллелограмма: «Сумма квадратов длин всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его ребер». Это свойство легко доказывается векторным методом.

Изображения прямого и прямоугольного параллелепипедов имеют один и тот же вид. При этом ошибочным является зрительное восприятие того, что сечение прямого параллелепипеда плоскостью, которая проходит через противоположные сторо-

ны его оснований, всегда — прямоугольник. На самом деле, если прямой параллелепипед не прямоугольный, то его сечением плоскостью, проходящей через противоположные стороны оснований, является параллелограмм, но не прямоугольник.

Действительно, пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой (но не прямоугольный) параллелепипед, $ABC_1 D_1$ — его сечение плоскостью, проходящей через противоположные стороны AB и $C_1 D_1$ оснований (рис. 85).

Так как $AB = C_1 D_1$ и $AB \parallel C_1 D_1$, то $ABC_1 D_1$ — параллелограмм. Докажем, что этот параллелограмм не может быть прямоугольником.

Предположим противное: пусть $ABC_1 D_1$ — прямоугольник. Тогда $AB \perp BC_1$ (как смежные стороны прямоугольника), $AB \perp BB_1$ (так как $B_1 B \perp (ABC)$), поэтому $AB \perp (B_1 BC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow ABCD$ — прямоугольник $\Rightarrow ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Пришли к противоречию с условием теоремы. Значит, предположение неверно, и четырехугольник $ABC_1 D_1$ — параллелограмм.

Аналогично, сечение $BCD_1 A_1$ — параллелограмм, но не прямоугольник. Утверждение доказано.

■ ЗАДАЧА (2.090). В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ $AB = 29$ см, $AD = 36$ см, $BD = 25$ см, $AA_1 = 48$ см. Найдите площадь сечения $AB_1 C_1 D$.

Дано. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед (рис. 86); $AB = 29$ см, $AD = 36$ см, $BD = 25$ см, $AA_1 = 48$ см.

Найти: $S_{AB_1 C_1 D}$

Решение. Имеем $29^2 + 36^2 \neq 25^2 \Rightarrow AB^2 + AD^2 \neq BD^2 \Rightarrow \triangle ABD$ — не прямоугольный $\Rightarrow ABCD$ — параллелограмм,

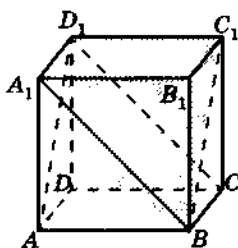


Рис. 85

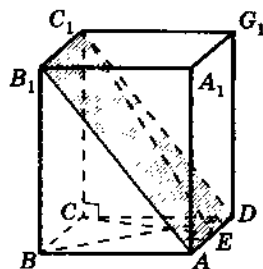


Рис. 86

но не прямоугольник. Это означает, что сечение AB_1C_1D — параллелограмм (докажите почему). Пусть C_1E — высота этого параллелограмма, тогда (по теореме о трех перпендикулярах) CE — высота основания $ABCD$.

Поэтому

$$S_{AB_1C_1D} = AD \cdot C_1E, \quad (1)$$

$$\triangle CC_1E (\angle C = 90^\circ): C_1E = \sqrt{CC_1^2 + CE^2}, \quad (2)$$

$$CE = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{2S_{\triangle ABD}}{AD}. \quad (3)$$

Таким образом, находим:

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2\sqrt{45 \cdot (45 - 25) \cdot (45 - 29) \cdot (45 - 36)} = 720.$$

$$\text{Тогда из (3), (2) и (1) последовательно получаем } CE = \frac{720}{36} =$$

$$= 20; C_1E = \sqrt{48^2 + 20^2} = 52; S_{AB_1C_1D} = 36 \cdot 52 = 1872 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 1872 см².

■ ЗАДАЧА (2.099). Три ребра прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, «видны» из точки пересечения его диагоналей под углами α , β и γ . Докажите, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 87); $O = A_1 C \cap B D_1$; $\angle AOB = \alpha$; $\angle BOC = \beta$; $\angle B_1 O B = \gamma$.

Доказать: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$.

Решение. Введем три некомпланарных

вектора: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Так как все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны между собой, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам, то $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = p$. Тогда

$$\cos \alpha = \cos \angle(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{p^2};$$

$$\cos \beta = \cos \angle(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \cos \angle(\vec{b}; \vec{c}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{p^2};$$

$$\cos \gamma = \cos \angle(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OB_1}) = \cos \angle(\vec{b}; \overrightarrow{OB_1}) = \frac{\vec{b} \cdot \overrightarrow{OB_1}}{|\vec{b}| \cdot |\overrightarrow{OB_1}|} = \frac{\vec{b} \cdot \overrightarrow{OB_1}}{p^2}.$$

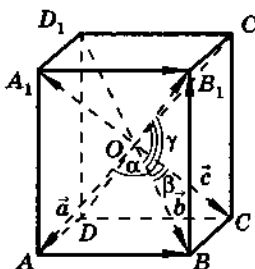


Рис. 87

Имеем $\triangle OA_1B_1$: $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$.

Но $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OC} = -\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Поэтому $\overrightarrow{OB_1} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Значит, $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OB_1} = \vec{b} \cdot (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{p^2} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{p^2} + \frac{\vec{b} \cdot (-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})}{p^2} = \\ &= \frac{\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c} - \vec{a} + \vec{b} - \vec{c})}{p^2} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{b}}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1, \text{ что и требовалось дока-} \end{aligned}$$

зать.

■ **ЗАДАЧА (2.105).** Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60° . Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см^2 . Найдите: а) площадь второго диагонального сечения; б) площадь боковой поверхности параллелепипеда; в) площадь полной поверхности параллелепипеда; г) площади сечений параллелепипеда, проходящих через противоположные стороны его верхнего и нижнего оснований.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямой параллелепипед (рис. 88); $AD = 8 \text{ см}$, $AB = 15 \text{ см}$, $\angle BAD = 60^\circ$, $S_{BDD_1 B_1} = 130 \text{ см}^2$.

Найти. а) $S_{ACC_1 A_1}$; б) $S_{\text{бок}}$; в) $S_{\text{полн}}$; г) $S_{ABC_1 D_1}$; $S_{BCD_1 A_1}$.

Решение. $\angle BAD = 60^\circ$, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD связаны неравенством $BD < AC$. Поэтому $S_{BDD_1 B_1} = 130$, и требуется найти $S_{ACC_1 A_1}$. Так как $ACC_1 A_1$ — прямоугольник (почему?), то $S_{ACC_1 A_1} = AC \cdot AA_1$.

Найдем длины отрезков AC и AA_1 .

$$\begin{aligned} \triangle ABD: BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = \\ &= 225 + 64 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 169 \Rightarrow BD = 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC: AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 225 + 64 - \\ &- 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 409 \Rightarrow AC = \sqrt{409}. \end{aligned}$$

Далее,

$$S_{BDD_1 B_1} = BD \cdot BB_1 = 130 \Rightarrow BB_1 = 130 : BD = 130 : 13 = 10.$$

Тогда:

$$\text{а) } S_{ACC_1 A_1} = AC \cdot AA_1 = 10 \sqrt{409};$$

$$\text{б) } S_{\text{бок}} = 2(AB + BC) \cdot AA_1 = 460;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } S_{\text{полн}} &= S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}; S_{\text{осн}} = \\ &= AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 60\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } S_{\text{полн}} &= 460 + 2 \cdot 60\sqrt{3} = \\ &= 20 \cdot (23 + 6\sqrt{3}); \end{aligned}$$

г) сечение ABC_1D_1 — параллелограмм (почему?). Пусть D_1F — высота этого параллелограмма. Тогда $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot D_1F$. Найдём длину D_1F .

Имеем:

$D_1F \perp AB$, $D_1D \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Поэтому $DF = AD \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$,

$$\triangle DD_1F (\angle D = 90^\circ): D_1F = \sqrt{DD_1^2 + DF^2} = \sqrt{100 + 48} = 2\sqrt{37}.$$

Тогда

$$S_{ABC_1D_1} = 15 \cdot 2\sqrt{37} = 30\sqrt{37}.$$

Аналогично, сечение BCD_1A_1 — параллелограмм. Если D_1E — высота этого параллелограмма, то $DE \perp BC$. Поэтому $\angle DED_1 = \varphi$ — угол между плоскостью сечения BCD_1A_1 и плоскостью основания $ABCD$. Так как основание $ABCD$ является ортогональной проекцией сечения BCD_1A_1 , то $S_{BCD_1A_1} = S_{\text{осн}} : \cos \varphi$. Найдём $\cos \varphi$.

$$\triangle DEC: DE = DC \cdot \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

$$\triangle DED_1: \operatorname{tg} \varphi = \frac{DD_1}{DE} = 10 : \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\text{Откуда } S_{BCD_1A_1} = 60\sqrt{3} : \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} = 20\sqrt{43}.$$

Ответ: а) $10\sqrt{409}$ см²; б) 460 см²; в) $20 \cdot (23 + 6\sqrt{3})$ см²; г) $30\sqrt{37}$ см²; $20\sqrt{43}$ см².

■ ЗАДАЧА (2.107). Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с меньшей боковой гранью угол α ,

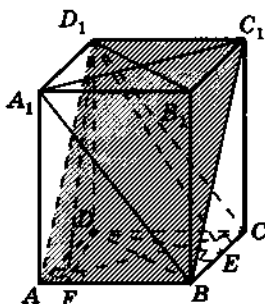


Рис. 88

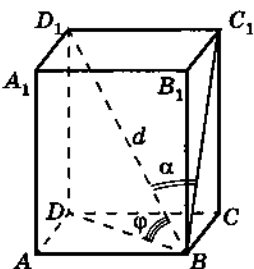


Рис. 89

а с плоскостью основания — угол φ . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед; $BD_1 = d$; $\angle DBD_1 = \varphi$; $\angle D_1 BC_1 = \alpha$ (рис. 89).

Найти: $S_{\text{бок}}$.

Решение. $S_{\text{бок}} = 2 \cdot (S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1})$. Так как все боковые грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники, то

$$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1; S_{BCC_1B_1} = BC \cdot BB_1.$$

Найдем стороны основания и боковое ребро параллелепипеда.

Вследствие того, что $DD_1 \perp (ABC)$ и $D_1 C_1 \perp (BCC_1)$, имеем:

в $\triangle BDD_1$ ($\angle BDD_1 = 90^\circ$): $BD = d \cdot \cos \varphi$, $DD_1 = d \cdot \sin \varphi$;

в $\triangle BC_1 D_1$ ($\angle BC_1 D_1 = 90^\circ$): $BC_1 = d \cdot \cos \alpha$, $C_1 D_1 = d \cdot \sin \alpha$.

Тогда

$$\triangle BCD \quad (\angle BCD = 90^\circ): BC^2 = BD^2 - CD^2 =$$

$$= d^2 \cos^2 \varphi - d^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow BC = d \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}.$$

Так как $AB = C_1 D_1$, $BB_1 = DD_1$, то $S_{ABB_1A_1} = d \cdot \sin \alpha \cdot d \cdot \sin \varphi = d^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi$;

$$S_{BCC_1B_1} = d \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha} \cdot d \cdot \sin \varphi = d^2 \cdot \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем } \cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{\cos 2\varphi + \cos 2\alpha}{2} = \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= 2 \cdot (S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1}) = \\ &= 2 \cdot (d^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi + d^2 \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos(\varphi + \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)}) = \\ &= 2d^2 \cdot \sin \varphi (\sin \alpha + \sqrt{\cos(\varphi + \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)}). \end{aligned}$$

Ответ: $2d^2 \cdot \sin \varphi (\sin \alpha + \sqrt{\cos(\varphi + \alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)})$.

Определение. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется кубом.

Из этого определения следует, что у куба все грани — равные квадраты.

12.2. Объем параллелепипеда

Объем параллелепипеда, как и любой другой призмы, равен произведению площади его основания на высоту.

Ранее отмечалось, что у параллелепипеда, в отличие от любой другой призмы, любая грань может быть принята за его основание. При этом каждой грани параллелепипеда, принятой за его основание, соответствует высота параллелепипеда, опущенная на эту грань. Таким образом:

$$V_{\text{паралл}} = S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2 = S_3 \cdot h_3,$$

где S_1, S_2, S_3 — площади трех граней параллелепипеда, имеющих общую вершину, h_1, h_2, h_3 — высоты параллелепипеда, опущенные на эти грани.

Этим соотношением часто пользуются при решении различных задач.

■ **ЗАДАЧА (2.163).** Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом в 60° , расположенные так, что три острых плоских угла трех граней имеют общую вершину. Найдите объем параллелепипеда.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, все грани которого — равные ромбы; $AB = a$, $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD = \angle BAD = 60^\circ$ (рис. 90).

Найти: объем параллелепипеда.

Решение. Объем V данного параллелепипеда найдем по формуле: $V = S_{\text{осн}} \cdot h = S_{ABCD} \cdot A_1 H$, где $A_1 H$ — высота параллелепипеда.

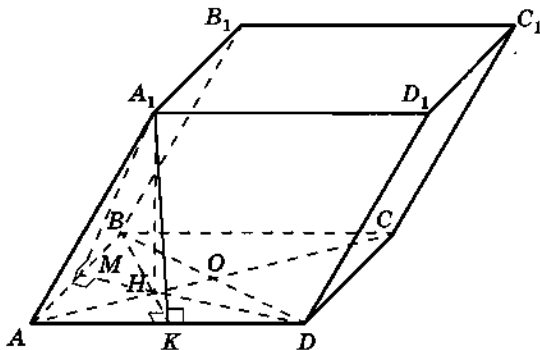


Рис. 90

Прежде всего, докажем, что основание H высоты A_1H параллелепипеда лежит на диагонали AC ромба $ABCD$.

В самом деле, так как все грани параллелепипеда — равные ромбы, то высоты всех граней равны. Пусть A_1K и A_1M — высоты граней AA_1D_1D и AA_1B_1B (рис. 90), где K — середина AD , M — середина AB (докажите почему). Так как A_1H — перпендикуляр к плоскости основания параллелепипеда, то по теореме о трех перпендикулярах $HK \perp AD$, $HM \perp AB$. При этом $HK = HM$ (как проекции равных наклонных), т. е. точка H равноудалена от сторон угла BAD , значит, H принадлежит диагонали AC ромба $ABCD$, которая является биссектрисой угла BAD . Более того, так как K — середина AD и M — середина AB , то в точке H пересекаются медианы BK , DM и AO треугольника ABD .

Из сказанного следует важный вывод: изображение заданного параллелепипеда следует начинать с построения нижнего основания $ABCD$ и точки $H = AC \cap BK$ (где K — середина AD); вершина A_1 выбирается на перпендикуляре, проведенном через точку H к плоскости основания.

Теперь нетрудно найти длину высоты A_1H .

В правильном $\triangle ABD$: $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. В прямоугольном $\triangle AA_1H$: $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. А так как $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, то $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
 Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

§ 13. Трехгранные и многогранные углы

13.1. Понятие о многогранном угле.

Трехгранный угол

Пусть $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — плоский выпуклый многоугольник и P — точка, лежащая вне плоскости этого многоугольника (рис. 91).

Определение. Множество всех точек, принадлежащих лучам PM , где точка M «пробегает» многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$, называется многогранным углом и обозначается $PA_1A_2A_3 \dots A_n$.

Точка P называется *вершиной многогранного угла*, лучи $PA_1, PA_2, PA_3, \dots, PA_n$ — *ребрами многогранного угла*, углы

$A_1PA_2, A_2PA_3, \dots, A_nPA_1$ — *гранями* (или *плоскими углами*) *многогранного угла* $PA_1A_2A_3 \dots A_n$.

Объединение всех граней многогранного угла является его границей. Точки многогранного угла, не принадлежащие его границе, образуют *внутреннюю область* многогранного угла.

Вследствие выпуклости многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$, многогранный угол $PA_1A_2 \dots A_n$ является выпуклой фигурой (внутренняя область этого угла расположена по одну сторону от плоскости каждой его грани).

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые многогранные углы.

Каждые две грани многогранного угла, имеющие общее ребро, образуют двугранный угол. На рисунке 91 изображены линейные углы таких двугранных углов.

В зависимости от числа граней (ребер) многогранные углы могут быть трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.

Трехгранный угол обладает следующим замечательным свойством.

Теорема 16. В трехгранном угле величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

Доказательство. Пусть угол AMC — наибольший из плоских углов трехгранного угла $MABC$ (рис. 92).

В грани AMC проведем такой луч MK , что $\angle AMK = \angle AMB$. Затем на лучах MB, MK отложим равные отрезки соответственно MF, MD ($MF = MD$); через точки D и F проведем произвольную плоскость, пересекающую ребра MA и MC соответ-

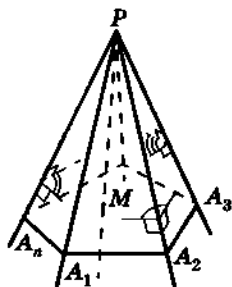


Рис. 91

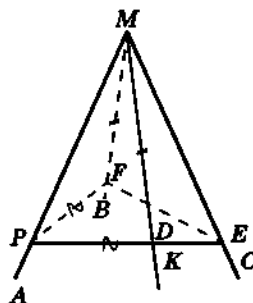


Рис. 92

ственно в некоторых точках P и E . Тогда $\triangle PMF = \triangle PMD$ (по двум сторонам и углу между ними), откуда $PF = PD$.

В $\triangle PEF$ имеем $PE < PF + FE$ или $PD + DE < PF + FE$. Но так как $PF = PD$, то получаем $DE < EF$. Сравнив $\triangle DEM$ и $\triangle FEM$, учитывая, что у них ME — общая сторона, $MD = MF$ и $DE < EF$, приходим к выводу: $\angle FME > \angle DME$. Тогда $\angle FME > \angle DME \Rightarrow \angle FME + \angle AMB > \angle DME + \angle AMB \Rightarrow \angle BMC + \angle AMB > \angle KMC + \angle AMK \Rightarrow \angle AMB + \angle BMC > \angle AMC$, что и требовалось доказать. ▽

Выпуклый многогранный угол обладает следующим свойством, которое выражает

Теорема. Сумма величин всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Пусть $MA_1A_2...A_n$ — произвольный выпуклый многогранный угол, заданный выпуклым многоугольником $A_1A_2...A_n$ (рис. 93).

Рассмотрим n трехгранных углов с вершинами в точках A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Для каждого из них запишем свойство трехгранного угла: $\angle A_i < \alpha_{i1} + \alpha_{i2}$, где $\angle A_i$ — величина внутреннего угла выпуклого многоугольника $A_1A_2...A_n$, а α_{i1} и α_{i2} — величины углов тех треугольников, которые имеют точку A_i своей общей вершиной и лежат в гранях этого трехгранного угла, являющихся гранями данного многогранного угла. Суммируя все эти неравенства, получим: сумма $180^\circ(n - 2)$ всех внутренних углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ меньше $180^\circ n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, где $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ — сумма всех плоских углов при вершине M данного многогранного угла $MA_1A_2...A_n$, которые являются внутренними углами всех n треугольников, лежащих в его гранях, т. е. $180^\circ(n - 2) < 180^\circ n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, откуда $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 360^\circ$. Теорема доказана. ▽

13.2. Теорема косинусов и теорема синусов для трехгранного угла

Пусть дан трехгранный угол $MABC$, в котором $\angle AMB = \alpha$, $\angle AMC = \beta$, $\angle BMC = \varphi$ — плоские углы (рис. 94); $\varphi_{дв}$ — величина его двугранного угла $B(AM)C$ при ребре AM , противолежащем плоскому углу φ .

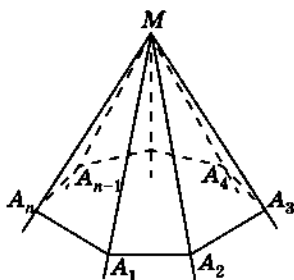


Рис. 93

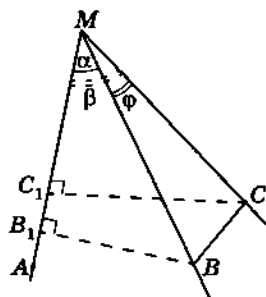


Рис. 94

Выберем на ребрах данного трехгранного угла точки B и C так, что $MB = MC = 1$, и рассмотрим двугранный угол $B(AM)C$ с ребром AM .

Опустим из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на ребро AM . Тогда $BB_1 = \sin \alpha$, $CC_1 = \sin \beta$, а $B_1C_1 = |\cos \alpha - \cos \beta|$. Используя пространственную теорему косинусов для двугранного угла $B(AM)C$, получим:

$$BC^2 = BB_1^2 + CC_1^2 - 2BB_1 \cdot CC_1 \cdot \cos \varphi_{\text{дв}} + B_1C_1^2$$

или

$$BC^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{\text{дв}} + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2\cos \alpha \cdot \cos \beta,$$

откуда

$$BC^2 = 2 - 2\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{\text{дв}} - 2\cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (*)$$

С другой стороны, в треугольнике BMC по теореме косинусов имеем:

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cdot \cos \varphi = 2 - 2\cos \varphi. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получаем:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{\text{дв}}. \quad (1)$$

Данное соотношение между плоскими углами α , β и φ трехгранного угла и величиной его двугранного угла $\varphi_{\text{дв}}$ при ребре, противолежащем плоскому углу φ , часто называют **теоремой косинусов для трехгранного угла**. Используя это соотношение, можно еще раз убедиться, что в трехгранном угле вели-

чина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов. Действительно,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi_{\text{дв}} > \\ &> \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos (\alpha + \beta), \text{ откуда } \varphi < \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Из теоремы косинусов для трехгранного угла (на основании соотношения (1)) имеем:

$$\cos \varphi_{\text{дв}} = \frac{\cos \varphi - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta},$$

аналогично,

$$\cos \beta_{\text{дв}} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \varphi}{\sin \alpha \cdot \sin \varphi}.$$

Путем несложных, но довольно громоздких, преобразований мы получим:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi_{\text{дв}} &= 1 - \left(\frac{\cos \varphi - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \right)^2 = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\sin^2 \varphi_{\text{дв}}}{\sin^2 \varphi} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Аналогично,

$$\frac{\sin^2 \alpha_{\text{дв}}}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi},$$

$$\frac{\sin^2 \beta_{\text{дв}}}{\sin^2 \beta} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Следовательно, для данного трехгранного угла отношение синуса двугранного угла к синусу противолежащего ему плоского угла есть величина постоянная, т. е.

$$\frac{\sin \varphi_{\text{дв}}}{\sin \varphi} = \frac{\sin \beta_{\text{дв}}}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_{\text{дв}}}{\sin \alpha}.$$

Это соотношение называют *теоремой синусов для трехгранного угла*.

§ 14. Пирамида

14.1. Определение пирамиды и ее элементов

Определение. Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной (рис. 95, 96).

Многоугольник называется *основанием пирамиды*, остальные грани — *боковыми гранями* пирамиды, их общая вершина — *вершиной пирамиды*. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами ее основания, называются *боковыми ребрами пирамиды*.

Пирамиду с основанием $ABCDE$ и вершиной P обозначают $PABCDE$.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется *высотой пирамиды*. Длину этого перпендикуляра также называют высотой пирамиды.

Пирамида называется n -угольной, если ее основанием является n -угольник.

На рисунке 96 изображена четырехугольная пирамида $PABCD$, у которой: четырехугольник $ABCD$ — основание пирамиды; точка P — вершина пирамиды; отрезки PA , PB , PC , PD — боковые ребра пирамиды; отрезки AB , BC , CD , DA — стороны (ребра) основания пирамиды; отрезок PO — высота пирамиды; треугольники PAB , PBC , PCD , PDA — боковые грани пирамиды.

У n -угольной пирамиды имеется $(n + 1)$ вершин, $2n$ ребер и $(n + 1)$ граней. Диагоналей пирамида не имеет. В пирамиде

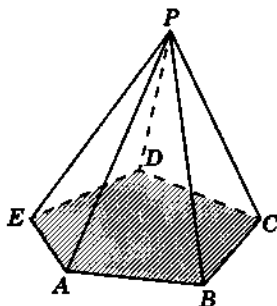


Рис. 95

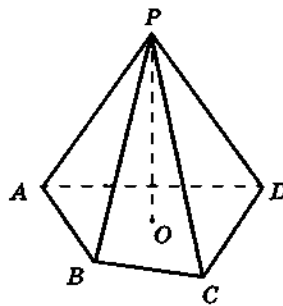


Рис. 96

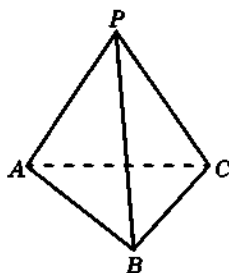


Рис. 97

различают плоские углы при ее вершине и двугранные углы при ее ребрах. Двугранным углом при ребре пирамиды называют содержащий пирамиду двугранный угол, образованный плоскостями граней, проходящими через данное ребро.

Треугольную пирамиду (рис. 97) называют также **тетраэдром** («тетраэдр» по-гречески означает «четырехгранник»). **Тетраэдр** — это многогранник с наименьшим числом граней. Любая грань

тетраэдра может быть принята за его основание; это отличает тетраэдр от всех остальных пирамид.

Любую пирамиду можно разбить на некоторое число тетраэдров, а любой выпуклый многогранник — на некоторое число пирамид. Для этого достаточно, например, взять любую точку внутри данного многогранника и соединить ее отрезками со всеми его вершинами. Такое разбиение часто используется при нахождении объемов многогранников.

14.2. Некоторые виды пирамид

Если все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы, то: а) основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды; б) все боковые ребра пирамиды равны между собой.

Доказательство. а) Пусть PO — высота пирамиды $PABDEF$, все ребра которой составляют с плоскостью основания угол φ (рис. 98). Тогда прямоугольные треугольники POA , POB , POC , POD , POE и POF , имея общий катет PO , равны между собой (по катету и острому углу φ). Из равенства этих треугольников следует: $OA = OB = OC = OD = OE = OF$, т. е. вершины основания пирамиды равноудалены от основания O ее высоты PO . Это означает, что точка O — центр окружности, описанной около основания $ABCDEF$ данной пирамиды.

б) Из $OA = OB = OC = OD = OE = OF$ следует, что боковые ребра PA , PB , PC , PD , PE , PF пирамиды равны, как наклонные, имеющие равные проекции, т. е. $PA = PB = PC = PD = PE = PF$. Что и требовалось доказать. ▼

Вы самостоятельно можете доказать обратные утверждения.

1. Если основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около ее основания, то: а) все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы; б) все боковые ребра пирамиды равны между собой.

2. Если все боковые ребра пирамиды равны, то: а) основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды; б) все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью ее основания равные между собой углы.

Также имеет место следующее утверждение.

Если высота пирамиды пересекает ее основание и все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в ее основание.

Доказательство. Пусть PO — высота пирамиды $PABCDE$, боковые грани которой образуют с плоскостью основания пирамиды двугранные углы, равные φ (рис. 99).

Проведем высоты $PH_1, PH_2, PH_3, PH_4, PH_5$ боковых граней.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах получаем $OH_1 \perp AB$, $OH_2 \perp BC$, $OH_3 \perp CD$, $OH_4 \perp DE$, $OH_5 \perp EA$, следовательно, $\angle OH_1P = \angle OH_2P = \angle OH_3P = \angle OH_4P = \angle OH_5P = \varphi$. Поэтому $\triangle OH_1P = \triangle OH_2P = \triangle OH_3P = \triangle OH_4P = \triangle OH_5P$ (как прямоугольные с общим катетом OP и острым углом φ). Из равенства этих треугольников следует $OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = OH_5$, т. е. точка O — основание высоты PO пирамиды — равноуда-

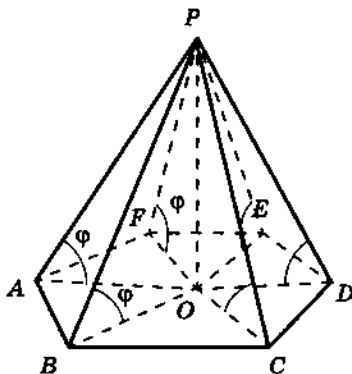


Рис. 98

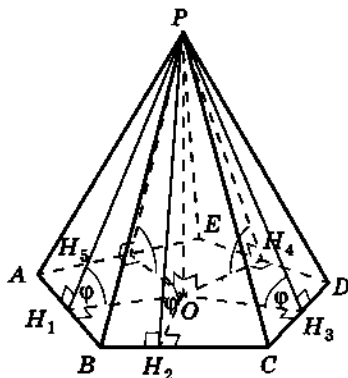


Рис. 99

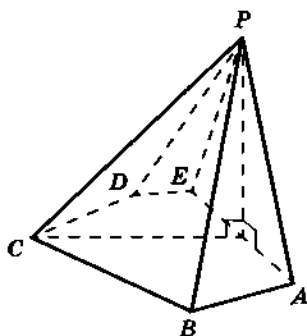


Рис. 100

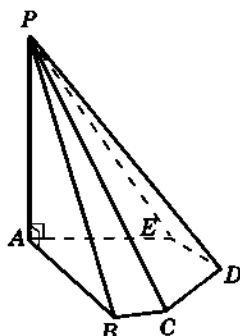


Рис. 101

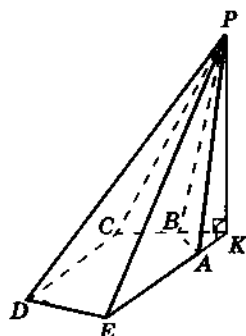


Рис. 102

лена от всех сторон многоугольника $ABCDE$. Это означает, что точка O является центром окружности, вписанной в основание $ABCDE$ данной пирамиды. Теорема доказана. ▼

Самостоятельно докажите обратное утверждение.

Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды, то боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы.

Перечислим еще несколько часто встречающихся в задачах видов пирамид.

Пирамида, ровно одна боковая грань которой перпендикулярна плоскости основания. Высота такой пирамиды лежит в этой, перпендикулярной основанию, грани (рис. 100).

Пирамида, две соседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания. Высотой такой пирамиды служит боковое ребро, общее для этих граней (рис. 101).

Пирамида, две не соседние боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания. Высота такой пирамиды лежит на прямой пересечения плоскостей этих граней (рис. 102).

14.3. Правильная пирамида

Определение. Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник и вершина пирамиды проектируется в центр этого основания.

Из определения следует алгоритм построения изображения правильных пирамид, что, в свою очередь, доказывает существование таких пирамид.

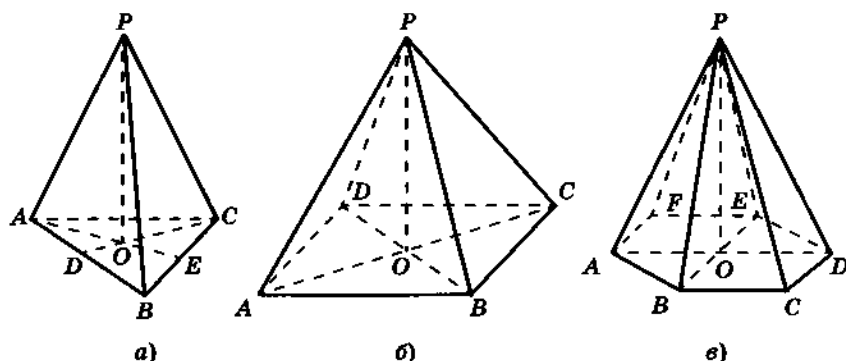


Рис. 103

Для построения изображения правильной пирамиды достаточно построить изображение соответствующего правильного многоугольника (основания пирамиды) и его центра. Затем из построенного центра провести перпендикуляр к плоскости многоугольника и выбрать на этом перпендикуляре (в качестве вершины пирамиды) любую точку, отличную от центра многоугольника. Соединив отрезками прямых эту точку со всеми вершинами многоугольника, получим изображение правильной пирамиды.

На рисунке 103, а, б, в построены изображения правильных пирамид: а) треугольной; б) четырехугольной; в) шестиугольной.

Правильные пирамиды обладают замечательным свойством.

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, а все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Доказательство. Рассмотрим правильную n -угольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$. Пусть O — центр n -угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$; PO — перпендикуляр к плоскости основания пирамиды (рис. 104).

Так как центр правильного многоугольника является центром окружности, описанной около этого многоугольника, то $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_n$ (как радиусы описанной окружности). Тогда равны боковые ребра пирамиды, как наклонные

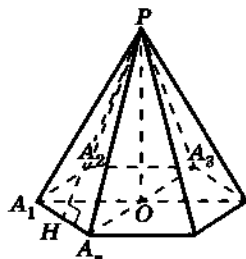


Рис. 104

к плоскости ее основания, имеющие равные проекции, т. е. $PA_1 = PA_2 = PA_3 = \dots = PA_n$.

Таким образом, имеем:

$$PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n \text{ (как боковые ребра);}$$

$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$ (как стороны правильного n -угольника).

Следовательно, треугольники $PA_1A_2, PA_2A_3, \dots, PA_nA_1$ являются равнобедренными и по третьему признаку равенства треугольников равны между собой.

Это свойство правильной пирамиды можно доказать при помощи поворота пирамиды вокруг оси, содержащей ее высоту.

Так как точка O — центр правильного n -угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$, лежащего в основании правильной пирамиды $PA_1A_2 \dots A_n$, PO — перпендикуляр к плоскости ее основания, то при вращении данной пирамиды вокруг оси OP на угол, равный $\frac{360^\circ \cdot k}{n}$ (где $k = 1, 2, 3, \dots, n$), происходит самосовме-

щение этой пирамиды: вершины основания пирамиды отображаются на его же вершины (основание совмещается с самим собой); вершина P (как точка оси вращения) отображается на себя. Следовательно, боковые ребра пирамиды отображаются на боковые ребра, а боковые грани пирамиды — на ее боковые грани. А так как вращение вокруг прямой — движение, то все боковые ребра правильной пирамиды равны между собой, а грани являются равными равнобедренными (почему?) треугольниками. Утверждение доказано. ▼

Следствием доказанного выше является утверждение.

Все боковые ребра правильной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, а все боковые грани — равные двугранные углы.

Докажите это предложение самостоятельно.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная к ребру ее основания, называется *апофемой пирамиды*. На рисунке 104 отрезок PH — одна из апофем пирамиды.

Все апофемы правильной пирамиды равны вследствие равенства всех ее боковых граней.

Имеют место признаки правильной пирамиды: 1

Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, является правильной, если: а) все ее боковые ребра равны; б) все ее боковые ребра образуют с плоскостью

основания равные углы; в) все ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Докажите это самостоятельно.

■ ЗАДАЧА (2.244). Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h и образует с боковой гранью угол α . Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани и пересекающая ее. Найдите площадь сечения.

Дано: $PABCD$ — правильная пирамида (рис. 105); PO — высота пирамиды, $PO = h$; $\angle OPF = \alpha$.

Найти: S_{ADKM} .

Решение. Первый способ. Пусть EF — средняя линия основания пирамиды. Тогда $AD \perp EF$, $AD \perp PF \Rightarrow AD \perp (PEF) \Rightarrow (PEF) \perp (ADP)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Поэтому прямая PF является ортогональной проекцией прямой PO на плоскость ADP . Значит, $\angle OPF$ — угол между высотой PO и боковой гранью ADP пирамиды: $\angle OPF = \alpha$.

Далее имеем: $AD \perp (PEF)$, $BC \parallel AD \Rightarrow BC \perp (PEF) \Rightarrow$ прямая BC перпендикулярна любой прямой плоскости PEF . Поэтому если $FL \perp PE$ (в плоскости PEF), то $BC \perp FL$. Тогда $FL \perp BC$, $FL \perp PE \Rightarrow FL \perp (BCP) \Rightarrow (ADL) \perp (BCP)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей); при этом $(ADL) \cap (BCP) = MK$, $MK \parallel AD$, так как плоскости BCP и ADL проходят через параллельные прямые BC и AD . Значит, сечение $ADKM$ — трапеция, у которой FL — высота (почему?), откуда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{AD + MK}{2} \cdot FL.$$

Найдем AD , MK и FL .

В $\triangle OPF$ ($\angle POF = 90^\circ$):

$$OF = OP \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$PF = \frac{OP}{\cos \alpha} = \frac{h}{\cos \alpha} = PE.$$

$$\text{Поэтому } EF = 2FO = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha = BC.$$

В плоскости PEF получаем:

$$\begin{aligned} FL \perp PE, PO \perp EF \Rightarrow \\ \angle EFL = \angle OPE = \alpha. \end{aligned}$$

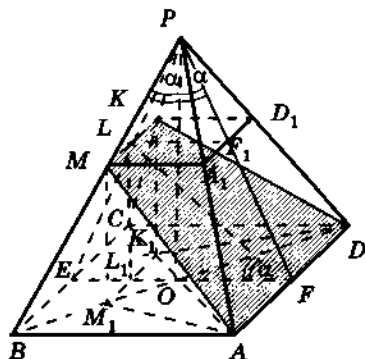


Рис. 105

Тогда в $\triangle EFL$: $FL = EF \cdot \cos \alpha = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = 2h \sin \alpha$;
в $\triangle PLF$ ($\angle PLF = 90^\circ$, $\angle PFL = 90^\circ - 2\alpha$):

$$PL = PF \cdot \sin (90^\circ - 2\alpha) = PF \cdot \cos 2\alpha = \frac{h \cos 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

Так как $MK \parallel BC$, то $\triangle MKP \sim \triangle BCP$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{MK}{BC} = \frac{PL}{PE} \Rightarrow MK &= \frac{BC \cdot PL}{PE} = \frac{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{h \cdot \cos 2\alpha}{\cos \alpha}}{\frac{h}{\cos \alpha}} = \\ &= 2h \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$AD = EF = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha, FL = 2h \cdot \sin \alpha, MK = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч}} &= \frac{AD + MK}{2} \cdot FL = \frac{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha + 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha}{2} \cdot 2h \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha) \cdot 2h \cdot \sin \alpha}{2} = 4h^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

! Замечание. Отрезок MK можно найти следующим образом. Сечением данной пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MK параллельно основанию пирамиды, является квадрат MKD_1A_1 (рис. 105). $F_1 = A_1D_1 \cap PF$. У этого квадрата $LF_1 = MK$. Найдем F_1L .

В треугольнике LF_1F имеем $\angle FLF_1 = \alpha$ ($LF_1 \parallel EF$), $\angle F_1FL = \angle OFP - \angle OFL = (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$;
 $\angle FF_1L = 180^\circ - \angle OFF_1 = 90^\circ + \alpha$. Тогда по теореме синусов

$$\begin{aligned} \frac{LF_1}{\sin (90^\circ - 2\alpha)} &= \frac{LF}{\sin (90^\circ + \alpha)} \Rightarrow LF_1 = \frac{LF \cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{2h \cdot \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

Значит, $MK = LF_1 = 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos 2\alpha$.

Второй способ. Пусть M_1, K_1, L_1 — ортогональные проекции на плоскость основания соответственно точек M, K, L (рис. 105, 106). Так как плоскости ACP , BDP и EFP перпендикулярны плоскости основания пирамиды, то ортогональными проекциями прямых PC, PB и PE на эту плоскость являются соответственно прямые AC, BD и EF . Следовательно, $M_1 \in BD$,

$K_1 \in AC$, $L_1 \in EF$, причем ADK_1M_1 — равнобедренная трапеция.

Таким образом, трапеция ADK_1M_1 — ортогональная проекция сечения $ADKM$.

Это означает, что $S_{ADKM} = \frac{S_{ADK_1M_1}}{\cos \alpha}$. Найдем $S_{ADK_1M_1}$. Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и $M_1K_1 \parallel AD$, то $OL_1 = L_1K_1$, $OF = FD$. Значит,

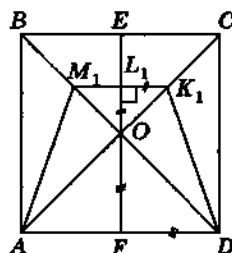


Рис. 106

$$S_{ADK_1M_1} = \frac{AD + K_1M_1}{2} \cdot L_1F = \frac{2OF + 2OL_1}{2} \cdot FL_1 = FL_1^2.$$

Тогда

$$S_{ADKM} = \frac{FL_1^2}{\cos \alpha} = \frac{FL^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 4h^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Ответ: $4h^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$.

14.4. Площади боковой и полной поверхностей пирамиды

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. В этой связи различают боковую и полную поверхности пирамиды, а также их площади.

Площадью боковой поверхности пирамиды (обозначают $S_{\text{бок}}$) называется сумма площадей всех ее боковых граней: $S_{\text{бок}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, где $S_1, S_2, \dots, S_n$ — площади боковых граней пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды (обозначают $S_{\text{полн}}$) называется сумма площадей всех ее граней, т. е. сумма площади основания пирамиды и площади ее боковой поверхности.

Из определения следует: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

О площади боковой поверхности правильной пирамиды имеет место

Теорема 17. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды.

Доказательство. Пусть $PA_1A_2 \dots A_n$ — правильная пирамида, a — длина ее апофемы (рис. 107).

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, у которых основаниями являются стороны правильного n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$, а высоты равны апофеме пирамиды, т. е. $PE_1 = PE_2 = PE_3 = \dots = PE_n = a$.

Тогда

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= S_{\triangle PA_1A_2} + S_{\triangle PA_2A_3} + \dots + S_{\triangle PA_nA_1} = \\ &= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot PE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot PE_2 + \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot PE_n = \\ &= \frac{1}{2} a \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) = \frac{1}{2} P \cdot a, \end{aligned}$$

где P — периметр основания пирамиды. Теорема доказана. ▽

Теорема 18. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ , и высота пересекает основание, то $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}$.

Доказательство. Пусть PO — высота пирамиды $PA_1A_2A_3 \dots A_n$, все боковые грани которой образуют с плоскостью основания углы, равные φ (рис. 108); $PH_1, PH_2, \dots, PH_n$ — высоты боковых граней. Тогда (по теореме о трех перпендику-

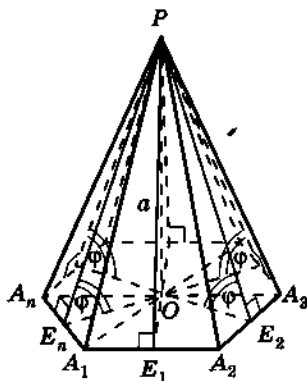


Рис. 107

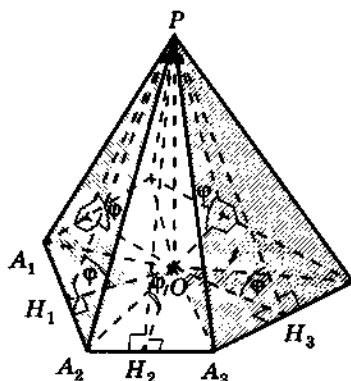


Рис. 108

лярах) $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$, ..., $OH_n \perp A_nA_1$. Значит, $\angle OH_1P = \angle OH_2P = \angle OH_3P = \dots = \angle OH_nP = \varphi$.

Так как точка O является центром круга, вписанного в основание пирамиды (почему?), то эта точка лежит внутри n -угольника $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Поэтому n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ является объединением непересекающихся треугольников A_1OA_2 , A_2OA_3 , ..., A_nOA_1 . Эти треугольники являются ортогональными проекциями на плоскость основания пирамиды ее соответствующих боковых граней. По теореме о площади ортогональной проекции многоугольника имеем:

$$S_{\triangle A_1OA_2} = S_{\triangle A_1PA_2} \cdot \cos \varphi,$$

$$S_{\triangle A_2OA_3} = S_{\triangle A_2PA_3} \cdot \cos \varphi,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_{\triangle A_nOA_1} = S_{\triangle A_nPA_1} \cdot \cos \varphi.$$

Сложив почленно эти равенства, получим $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos \varphi$, от-

куда $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}$. Теорема доказана. ▽

Так как все боковые грани правильной пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы (пусть величина этих углов равна φ , см. рис. 107), то для площади боковой поверхности и площади основания правильной пирамиды также справедлива формула

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}.$$

14.5. Свойства параллельных сечений пирамиды

Если плоскость α параллельна основанию пирамиды и пересекает ее, то в сечении пирамиды получается некоторый многоугольник (рис. 109).

Теорема 19. Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то: 1) боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части; 2) в сечении получается многоугольник, подобный основанию; 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

Доказательство. 1) Пусть сечением пирамиды $PABCD$ плоскостью α , параллельной плоскости β ее основания, является четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 109).

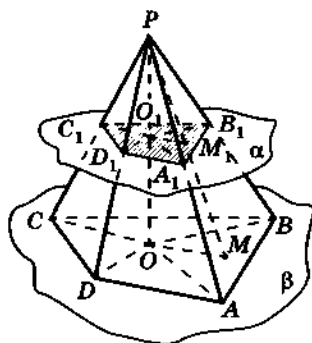


Рис. 109

Проведем высоту PO данной пирамиды и обозначим $O_1 = PO \cap \alpha$.

Рассмотрим гомотегию H_P^k с центром P , при которой плоскость основания данной пирамиды отображается на параллельную ей плоскость α (при гомотегии плоскость, не проходящая через центр гомотегии, отображается на параллельную ей плоскость).

Так как при гомотегии ее центр является неподвижной точкой, прямая, проходящая через центр гомотегии, отображается на себя, а пересечение двух фигур — на пересечение их образов, то гомотегия H_P^k отображает основание $ABCD$ пирамиды на ее параллельное сечение — многоугольник $A_1B_1C_1D_1$, при этом вершины A, B, C, D основания пирамиды — на вершины соответственно A_1, B_1, C_1, D_1 , а точку O — на точку O_1 (почему?).

Учитывая, что отношение длин гомотетичных отрезков равно коэффициенту гомотегии, получаем:

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{PB_1}{PB} = \frac{PC_1}{PC} = \frac{PD_1}{PD} = \frac{PO_1}{PO} = k, \quad (*)$$

где k — коэффициент гомотегии H_P^k . Это означает, что параллельное сечение пирамиды делит ее ребра и высоту на пропорциональные части. А поскольку гомотегия является подобием, то многоугольник $A_1B_1C_1D_1$, являющийся параллельным сечением пирамиды, подобен ее основанию $ABCD$.

Вследствие того, что отношение площадей гомотетичных фигур равно квадрату коэффициента гомотегии, а $k = PO_1 : PO$, где PO_1 и PO — расстояния соответственно параллельного сечения и основания пирамиды от ее вершины, то

$$S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{ABCD} = k^2 = PO_1^2 : PO^2. \quad 1$$

Теорема доказана. ▼

Следствие. Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает пирамиду, подобную данной.

14.6. Усеченная пирамида

Плоскость α , параллельная основанию пирамиды $PABCD$ и пересекающая ее, делит эту пирамиду на два многогранника: пирамиду $PA_1B_1C_1D_1$ и многогранник $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 109).

Многогранник $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 110) называют *усеченной пирамидой*. Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в параллельных плоскостях, называются соответственно *нижним* и *верхним основаниями усеченной пирамиды*, остальные грани — ее *боковыми гранями*. Так как нижнее и верхнее основания усеченной пирамиды гомотетичны (т. 19), то все ее боковые грани — трапеции.

Таким образом, *усеченной пирамидой называется часть полной пирамиды, заключенная между ее основанием и параллельным ему сечением*.

У n -угольной усеченной пирамиды $2n$ вершин, $3n$ ребер, $n + 2$ грани и $n(n - 3)$ диагоналей.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого. Длину этого перпендикуляра также называют высотой усеченной пирамиды. На рисунке 110 отрезки O_1O , B_1K — высоты усеченной пирамиды.

Усеченная пирамида называется правильной, если она получена из правильной пирамиды (рис. 111).

Из теоремы 19 следует, что основания правильной усеченной пирамиды — подобные правильные многоугольники, а боковые грани — равные равнобедренные трапеции.

Высоты этих трапеций, соединяющие середины их оснований, называются *апофемами усеченной пирамиды*. Все ее апофемы равны между собой.

Отрезок OO_1 , соединяющий центры оснований правильной усеченной пирамиды, является ее *высотой*.

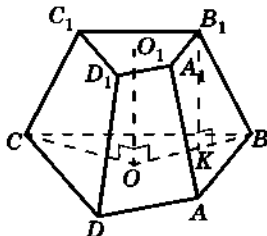


Рис. 110

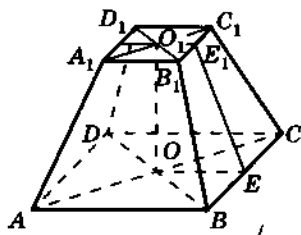


Рис. 111

Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды называется суммой площадей всех ее боковых граней.

Для правильной усеченной пирамиды имеет место

Теорема 20. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.

Для доказательства теоремы достаточно площадь одной из боковых граней пирамиды умножить на их число. В результате получим формулу $S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$, где P_1, P_2 — периметры нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды, h — ее апофема.

Проведите доказательство теоремы самостоятельно.

Полная поверхность усеченной пирамиды — это объединение ее оснований и боковой поверхности, поэтому для усеченной пирамиды

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2,$$

где S_1 и S_2 — площади большего и меньшего оснований этой пирамиды.

Для усеченной пирамиды, у которой все двугранные углы при ребрах большего основания равны φ , справедливо: $S_{\text{бок}} = \frac{S_1 - S_2}{\cos \varphi}$. (Для вывода этой формулы достаточно учесть следующий факт: если R и r — радиусы окружностей, вписанных соответственно в большее и меньшее основания данной пирамиды, то $S_1 = 0,5 \cdot P_1 \cdot R$, $S_2 = 0,5 \cdot P_2 \cdot r$, $\cos \varphi = \frac{R - r}{h}$, где h — высота боковой грани этой пирамиды.)

14.7. Объем пирамиды

Лемма. Две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.

Доказательство. Пусть пирамиды $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$ имеют высоты, равные H , и равновеликие основания с площадью S ; их объемы — соответственно V_1 и V_2 . Докажем, что $V_1 = V_2$.

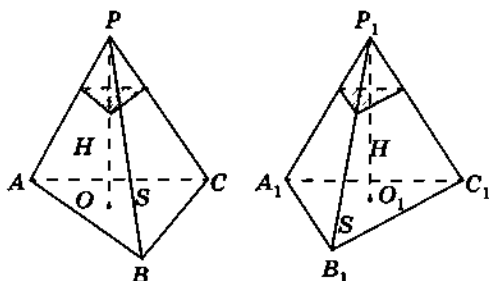


Рис. 112

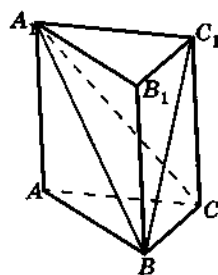


Рис. 113

Расположим пирамиды $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$ так, чтобы их основания лежали в одной плоскости, а сами пирамиды были расположены по одну сторону от этой плоскости (рис. 112). Тогда любая плоскость, параллельная плоскости оснований и пересекающая первую пирамиду, пересекает и вторую, причем по теореме о параллельных сечениях пирамиды площади этих сечений равны. Следовательно, на основании принципа Кавальери равны и объемы этих пирамид. Лемма доказана. ▽

Теорема 21. Объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство. Пусть A_1ABC — данная треугольная пирамида с вершиной A_1 и основанием ABC (рис. 113). Дополним эту пирамиду до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с тем же основанием, одним из боковых ребер которой является боковое ребро AA_1 данной пирамиды. Это означает, что высота призмы равна высоте данной пирамиды.

Призма $ABCA_1B_1C_1$ является объединением трех треугольных пирамид с общей вершиной A_1 : A_1ABC , $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 . Основания BB_1C_1 и BCC_1 пирамид $A_1BB_1C_1$ и A_1BCC_1 равны, а высота у них общая. Значит, по лемме у этих пирамид равные объемы.

Будем считать точку B вершиной пирамиды $A_1BB_1C_1$, а $\triangle A_1B_1C_1$ — ее основанием. Тогда эта пирамида равновелика пирамиде A_1ABC , так как у них общая высота, а основания ABC и $A_1B_1C_1$ равновелики (как основания призмы). Таким образом, призма $ABCA_1B_1C_1$ является объединением трех равновеликих пирамид, одной из которых является данная пирамида

A_1ABC . Это означает, что объем V пирамиды A_1ABC составляет одну треть объема призмы $ABCA_1B_1C_1$, т. е. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где H — высота призмы. Но построенная призма и данная пирамида имеют общую высоту H , следовательно, объем треугольной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$$

где H — высота пирамиды. Теорема доказана. ▼

На рисунке 114 изображены треугольная призма $ABCDEF$ и составляющие ее три равновеликие треугольные пирамиды $ABDF$, $ABCF$ и $BDEF$.

Для вычисления объема n -угольной пирамиды $PA_1A_2 \dots A_n$ (рис. 115) разобьем ее основание $A_1A_2 \dots A_n$ диагоналями A_1A_3 , A_1A_4 , ..., A_1A_{n-1} на треугольники с общей вершиной A_1 . Тогда данная пирамида разбивается в объединение пирамид $PA_1A_2A_3$, $PA_1A_3A_4$, ..., $PA_1A_{n-1}A_n$ с общей вершиной P и общей высотой, которая равна высоте данной пирамиды. Основаниями этих пирамид являются треугольники разбиения основания данной пирамиды. Это означает (свойство 2 объемов), что объем V пирамиды $PA_1A_2 \dots A_n$ равен сумме объемов $V_1, V_2, \dots, V_{n-2}$ треугольных пирамид соответственно $PA_1A_2A_3$, $PA_1A_3A_4$, ..., $PA_1A_{n-1}A_n$.

Пусть высота пирамиды равна H , площадь ее основания S , а площади треугольников разбиения этого основания равны $S_1, S_2, \dots, S_{n-2}$. Это означает, что $S_1 + S_2 + \dots + S_{n-2} = S$. Тогда получаем:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-2} = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \dots + S_{n-2}) = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

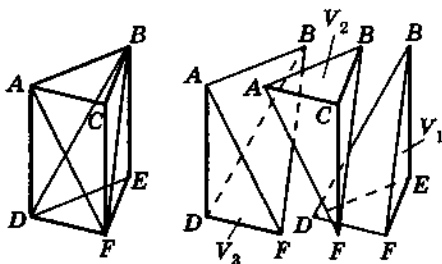


Рис. 114

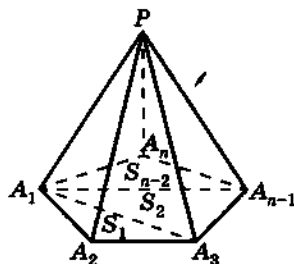


Рис. 115

Таким образом, объем любой пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, H — высота пирамиды.

Итак, доказана

Теорема 22. Объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

14.8. Об объеме тетраэдра

У тетраэдра за основание можно принять любую его грань, на каждую из которых можно провести высоту тетраэдра из противоположной этой грани вершины. Поэтому для объема V одного и того же тетраэдра имеют место соотношения

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot h_1 = \frac{1}{3} S_2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} S_3 \cdot h_3 = \frac{1}{3} S_4 \cdot h_4,$$

где S_k и h_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — площадь грани и длина опущенной на нее высоты. Эти соотношения часто используют при решении задач.

Заметим, что не в любом тетраэдре все четыре высоты пересекаются в одной точке (для сравнения — все три высоты любого треугольника пересекаются в одной точке). **Тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке, называется ортоцентрическим.**

Интересен также тетраэдр (рис. 116, а), все грани которого равны. Такой тетраэдр называется **равногранным**. Его разверткой является остроугольный треугольник (рис. 116, б).

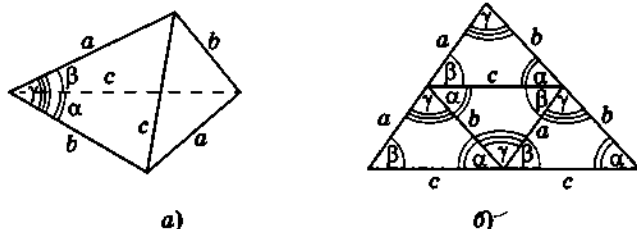


Рис. 116

- Докажите самостоятельно, что в равногранном тетраэдре:
- скрещивающиеся ребра попарно равны;
 - все высоты равны;
 - сумма плоских углов трехгранного угла при каждой вершине тетраэдра равна 180° ;
 - двугранные углы при скрещивающихся ребрах тетраэдра равны.

Не менее интересен следующий факт. Пусть дан тетраэдр A_1C_1BD . Проведем через каждое его ребро плоскость, параллельную скрещивающемуся с ним ребру. Проведенные шесть плоскостей при пересечении образуют некоторый параллелепипед $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 117), параллельные грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ которого содержат скрещивающиеся ребра A_1C_1 и BD данного тетраэдра. Тогда расстояние между основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ полученного параллелепипеда равно его высоте и равно расстоянию между скрещивающимися ребрами A_1C_1 и BD данного тетраэдра.

Этот параллелепипед можно разбить на пять тетраэдров — данный тетраэдр A_1C_1BD и еще четыре тетраэдра: A_1ABD ; $BB_1A_1C_1$; C_1CBD ; $DD_1A_1C_1$. Объем каждого из четырех последних тетраэдров равен одной трети высоты h параллелепипеда, умноженной на половину площади его основания $ABCD$, т. е. шестой части объема V полученного параллелепипеда.

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_{A_1C_1BD} &= V - 4 \cdot \frac{1}{6} V = \frac{1}{3} V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{6} h \cdot A_1C_1 \cdot BD \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

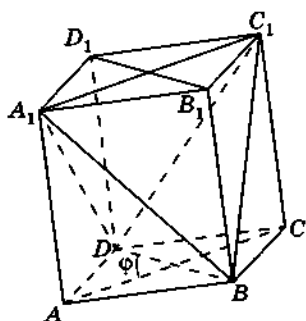


Рис. 117

где φ — угол между диагоналями AC и BD параллелограмма $ABCD$. А так как $AC \parallel A_1C_1$, то величина угла между скрещивающимися диагоналями A_1C_1 и BD тетраэдра A_1C_1BD также равна φ .

Мы получили: объем тетраэдра равен одной шестой произведения длин любых двух его скрещивающихся ребер, расстояния между ними и синуса угла между скрещивающимися прямыми, содержащими эти ребра.

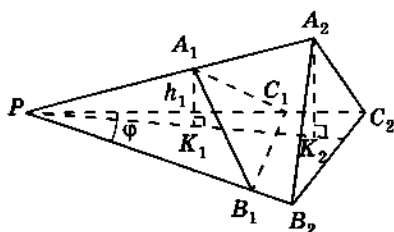


Рис. 118

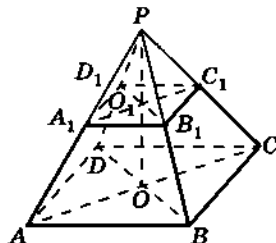


Рис. 119

Отметим еще несколько очевидных и менее очевидных свойств тетраэдров, связанных с их объемами.

1. Объемы тетраэдров с равными основаниями относятся как их высоты, опущенные на эти основания.

2. Объемы тетраэдров с равными высотами относятся как площади их оснований.

3. Объемы тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы, относятся, как произведения длин ребер, образующих эти углы.

Используя рисунок 118, вы сможете легко доказать и третье утверждение.

14.9. Объем усеченной пирамиды

Теорема 23. Объем усеченной пирамиды, у которой площади оснований равны S_1 и S_2 , а высота — H , вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Доказательство. Пусть дана усеченная пирамида (рис. 119), у которой $S_1 > S_2$, а высота $OO_1 = H$. Дополним эту пирамиду до полной пирамиды с вершиной P . Объем V данной усеченной пирамиды равен разности объемов полной и дополнительной пирамид.

Если длина высоты PO_1 дополнительной пирамиды равна x , то высота PO полной пирамиды равна $H + x$.

Выразим x через S_1 , S_2 и H . По теореме 19 (о площадях параллельных сечений пирамиды) имеем

$$\begin{aligned} S_1 : S_2 &= (H + x)^2 : x^2 \Rightarrow \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2} = (H + x) : x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{H \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}. \end{aligned}$$

Поэтому для объема V усеченной пирамиды находим

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_1(H+x) - \frac{1}{3} S_2 \cdot x = \frac{1}{3} (S_1 \cdot H + (S_1 - S_2) \cdot x) = \\ &= \frac{1}{3} \left(S_1 H + \frac{(S_1 - S_2)H \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \frac{1}{3} (S_1 H + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})H \sqrt{S_2}) = \\ &= \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ▼

§ 15. Правильные многогранники

15.1. Определение правильного многогранника

Определение. Многогранник называется правильным, если: 1) он выпуклый; 2) все его грани — равные друг другу правильные многоугольники; 3) в каждой его вершине сходится одинаковое число ребер; 4) все его двугранные углы равны.

Примером правильного многогранника является куб: он является выпуклым многогранником, все его грани — равные квадраты, в каждой вершине сходятся три ребра, и все двугранные углы куба прямые. Правильный тетраэдр также является правильным многогранником (проверьте это).

Возникает вопрос: сколько существует различных типов правильных многогранников?

15.2. Пять типов правильных многогранников

Рассмотрим произвольный правильный многогранник M , у которого B вершин, P ребер и Γ граней. По теореме Эйлера для этого многогранника выполняется равенство

$$B - P + \Gamma = 2. \quad (1)$$

Пусть каждая грань данного многогранника содержит m ребер (сторон), и в каждой его вершине сходятся n ребер. Очевидно,

$$m \geq 3, n \geq 3. \quad (2)$$

Так как у многогранника B вершин, в каждой из которых сходятся n ребер, то получаем $n \cdot B$ ребер. Но любое ребро соединяет две вершины многогранника, поэтому в произведение

$n \cdot B$ в каждое ребро войдет дважды. Значит, у многогранника M имеется $\frac{n \cdot B}{2}$ различных ребер. Тогда

$$\frac{n \cdot B}{2} = P \Rightarrow B = \frac{2P}{n}. \quad (3)$$

Далее, в каждой грани многогранника M содержится m ребер, а число граней равно Γ . Так как каждое ребро принадлежит двум смежным граням, то число различных ребер многогранника равно $\frac{m \cdot \Gamma}{2}$. Тогда

$$\frac{m \cdot \Gamma}{2} = P \Rightarrow \Gamma = \frac{2P}{m}. \quad (4)$$

Из (1), (3), (4) получаем $\frac{2P}{n} - P + \frac{2P}{m} = 2$, откуда

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{P} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} \\ m \geq 3, n \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 3 \leq n < 6;$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 3 \leq m < 6.$$

Из неравенств $3 \leq m < 6$ и $3 \leq n < 6$ следует, что гранями правильного многогранника могут быть либо правильные треугольники, либо правильные четырехугольники, либо правильные пятиугольники. Причем в случаях $m = n = 4$; $m = 4, n = 5$; $m = 5, n = 4$; $m = n = 5$ приходим к противоречию с условием $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$. Поэтому остаются возможными пять случаев: 1) $m = n = 3$; 2) $m = 4, n = 3$; 3) $m = 3, n = 4$; 4) $m = 5, n = 3$; 5) $m = 3, n = 5$.

Рассмотрим каждый из этих случаев, используя соотношения (5), (4) и (3).

1) $m = n = 3$ (каждая грань многогранника — правильный треугольник, в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow P = 6; B = \frac{2P}{n} = 4; \Gamma = \frac{2P}{m} = 4.$$

Таким образом, получается правильный четырехгранник, у которого каждая грань — правильный треугольник. Это —

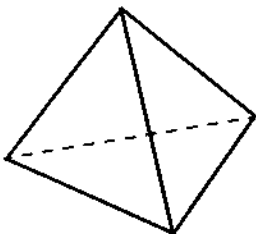


Рис. 120

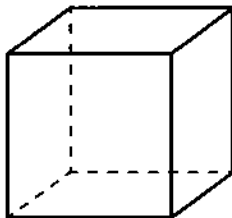


Рис. 121

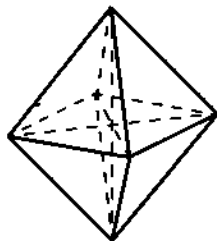


Рис. 122

известный нам **правильный тетраэдр** (рис. 120) («тетраэдр» означает *четырёхгранник*).

2) $m = 4$, $n = 3$ (каждая грань — квадрат, и в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow P = 12; V = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8; \Gamma = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6.$$

Получаем **правильный шестигранник**, у которого каждая грань — квадрат. Этот многогранник называется **правильным гексаэдром** и является кубом (рис. 121) («гексаэдр» — *шестигранник*), любой параллелепипед — гексаэдр.

3) $m = 3$, $n = 4$ (каждая грань — правильный треугольник, в каждой вершине сходятся четыре ребра). Имеем:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \Rightarrow P = 12; V = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6; \Gamma = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8.$$

Получаем **правильный восьмигранник**, у которого каждая грань — правильный треугольник (рис. 122). Этот многогранник называется **правильным октаэдром** («октаэдр» — *восьмигранник*).

4) $m = 5$, $n = 3$ (каждая грань — правильный пятиугольник, в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30} \Rightarrow P = 30; V = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20; \Gamma = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12.$$

Получаем **правильный двенадцатигранник**, у которого каждая грань — правильный пятиугольник (рис. 123). Этот многогранник называется **правильным додекаэдром** («додекаэдр» — *двенадцатигранник*).

5) $m = 3$, $n = 5$ (каждая грань — правильный треугольник, в каждой вершине сходятся пять ребер). Имеем

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30} \Rightarrow P = 30; V = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12; \Gamma = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20.$$

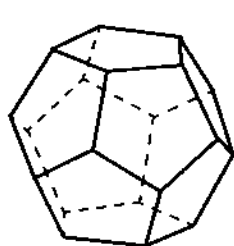


Рис. 123

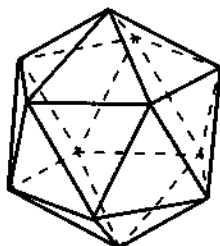


Рис. 124

Получаем правильный двадцатигранник (рис. 124). Этот многогранник называется *правильным икосаэдром* («икосаэдр» — двадцатигранник).

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема 24. Существует пять различных (с точностью до подобия) типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.

К этому заключению можно прийти несколько иначе.

Действительно, если грань правильного многогранника — правильный треугольник, и в одной вершине сходятся k ребер, т. е. все плоские углы выпуклого k -гранного угла равны 60° , то $60^\circ \cdot k < 360^\circ$. Следовательно, натуральное число k может принимать значения: 3; 4; 5. При этом $\Gamma = \frac{B \cdot k}{3}$, $P = \frac{B \cdot k}{2}$.

На основании теоремы Эйлера имеем: $B + \frac{B \cdot k}{3} - \frac{B \cdot k}{2} = 2$ или

$B \cdot (6 - k) = 12$. Тогда

при $k = 3$ получаем: $B = 4$, $\Gamma = 4$, $P = 6$ (правильный тетраэдр);

при $k = 4$ получаем: $B = 6$, $\Gamma = 8$, $P = 12$ (правильный октаэдр);

при $k = 5$ получаем: $B = 12$, $\Gamma = 20$, $P = 30$ (правильный икосаэдр).

Если грань правильного многогранника — правильный четырехугольник, то $90^\circ \cdot k < 360^\circ$. Этому условию соответствует единственное натуральное число $k = 3$. Тогда: $\Gamma = \frac{B \cdot k}{4}$,

$P = \frac{B \cdot k}{2}$; $B + \frac{B \cdot k}{4} - \frac{B \cdot k}{2} = 2$ или $B \cdot (4 - k) = 8$. Значит, $B = 8$,

$\Gamma = 6$, $P = 12$ — мы получаем куб (правильный гексаэдр).

Если гранью правильного многогранника является правильный пятиугольник, то $108^\circ \cdot k < 360^\circ$. Этому условию соответствует тоже только $k = 3$ и $\Gamma = \frac{B \cdot k}{5}$, $P = \frac{B \cdot k}{2}$. Аналогично предыдущим вычислениям получаем: $B \cdot (10 - 3k) = 20$ и $B = 20$, $\Gamma = 12$, $P = 30$ (правильный додекаэдр).

Начиная с правильных шестиугольников, предположительно являющихся гранями правильного многогранника, плоские углы становятся не меньше 120° , и уже для $k = 3$ их сумма становится не менее 360° , что невозможно. Следовательно, существует всего пять видов правильных многогранников.

На рисунке 125 изображены развертки (в уменьшенном масштабе) каждого из пяти правильных многогранников.

Некоторые свойства правильных многогранников приведены в следующей таблице.

Вид грани	Плоский угол при вершине	Вид многогранного угла при вершине	Сумма плоских углов при вершине	B	P	Г	Название многогранника
Правильный треугольник	60°	3-гранный	180°	4	6	4	Правильный тетраэдр
Правильный треугольник	60°	4-гранный	240°	6	12	8	Правильный октаэдр
Правильный треугольник	60°	5-гранный	300°	12	30	20	Правильный икосаэдр
Квадрат	90°	3-гранный	270°	8	12	6	Правильный гексаэдр (куб)
Правильный пятиугольник	108°	3-гранный	324°	20	30	12	Правильный додекаэдр

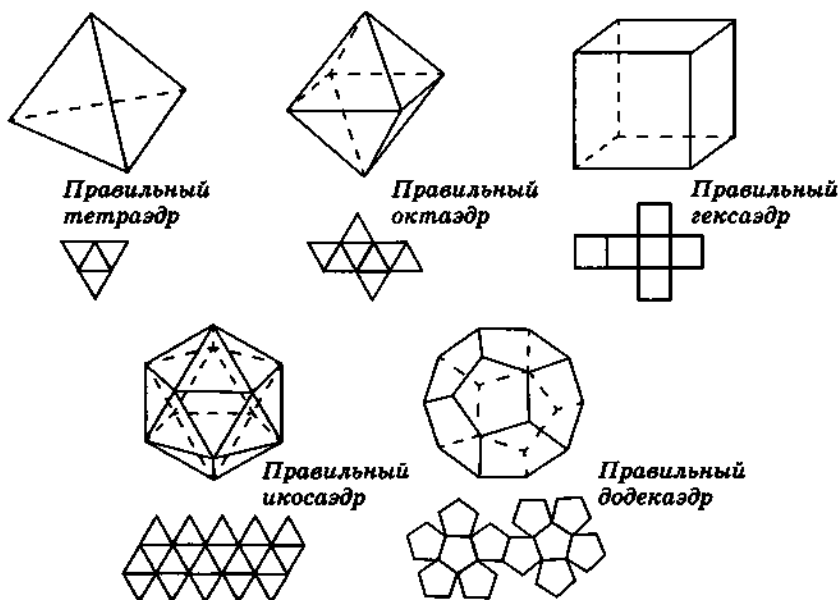


Рис. 125

У каждого из правильных многогранников, помимо уже указанных свойств, нас чаще всего будут интересовать:

1. Величина его двугранного угла при ребре (при длине ребра a).
2. Площадь его полной поверхности (при длине ребра a).
3. Его объем (при длине ребра a).
4. Радиус описанной около него сферы (при длине ребра a).
5. Радиус вписанной в него сферы (при длине ребра a).
6. Радиус сферы, касающейся всех его ребер (при длине ребра a).

Наиболее просто решается вопрос о вычислении площади полной поверхности правильного многогранника; она равна $\Gamma \cdot S_{\Gamma}$, где Γ — количество граней правильного многогранника, а S_{Γ} — площадь одной его грани.

Напомним, $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, что дает нам возможность за-

писать в радикалах: $\operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5}$. Учитывая это, составляем таблицы:

а) для площади грани правильного многогранника

Вид грани	Длина стороны	Длина апофемы грани	Площадь грани
Правильный треугольник	a	$0,5 \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{3} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$	$\frac{3a}{2} \cdot 0,5 \cdot a \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
Квадрат	a	$0,5a$	a^2
Правильный пятиугольник	a	$0,5 \cdot a \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{5} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} 36^\circ$	$\frac{5a}{2} \cdot 0,5 \cdot a \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}$

б) для площади полной поверхности правильного многогранника

Вид многогранника	Вид граней	Количество граней	Площадь полной поверхности
Правильный тетраэдр	Правильный треугольник	4	$4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3}$
Правильный октаэдр	Правильный треугольник	8	$8 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2a^2 \cdot \sqrt{3}$
Правильный икосаэдр	Правильный треугольник	20	$20 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5a^2 \cdot \sqrt{3}$
Правильный гексаэдр (куб)	Квадрат	6	$6a^2$
Правильный додекаэдр	Правильный пятиугольник	12	$12 \cdot \frac{a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

Теперь перейдем к вычислению величины двугранного угла β правильного многогранника при его ребре. Для правильного тетраэдра и куба вы легко найдете величину этого угла.

В правильном додекаэдре все плоские углы его граней равны по 108° , поэтому, применив теорему косинусов для трех-

гранных углов к любому трехгранному углу данного додекаэдра при его вершине, получим: $\cos 108^\circ = \cos^2 108^\circ + \sin^2 108^\circ \cdot \cos \beta$, откуда

$$\cos \beta = \frac{\cos 108^\circ}{1 + \cos 108^\circ} = \frac{-\sin 18^\circ}{1 - \sin 18^\circ} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}{1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\beta = \pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

На изображенном правильном октаэдре $ABCDMF$ (рис. 126) вы можете убедиться, что двугранный угол β при ребре октаэдра равен $2\arctg \sqrt{2}$: $\beta = 2\arctg \sqrt{2}$.

Для нахождения величины двугранного угла φ при ребре правильного икосаэдра (рис. 127) можно рассмотреть трехгранный угол $ABCD$ при вершине A : его плоские углы BAC и CAD равны по 60° , а третий плоский угол BAD , против которого лежит двугранный угол $B(AC)D = \varphi$, равен 108° ($BCDMF$ — правильный пятиугольник). По теореме косинусов для трехгранного угла $ABCD$ имеем: $\cos 108^\circ = \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ \cdot \cos \varphi$.

Учитывая, что $\cos 108^\circ = -\sin 18^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, получаем $-\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos \varphi$, откуда $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким образом, двугранный угол φ при ребре правильного икосаэдра равен $\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$: $\varphi = \pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$.

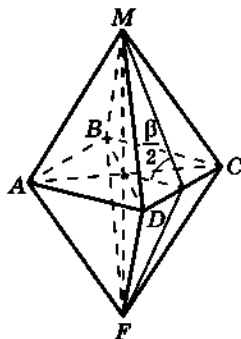


Рис. 126

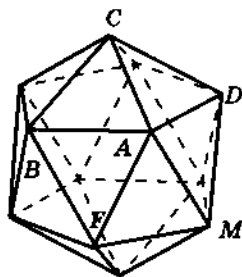


Рис. 127

Итак, получаем следующую таблицу величин двугранных углов при ребрах правильных многогранников.

Вид многогранника	Величина двугранного угла при ребре
Правильный тетраэдр	$\arccos \frac{1}{3}$
Правильный октаэдр	$2\arctg \sqrt{2} = \pi - \arccos \frac{1}{3}$
Правильный гексаэдр (куб)	90°
Правильный додекаэдр	$\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$
Правильный икосаэдр	$\pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$

Прежде чем находить объем того или иного правильного многогранника, сначала проведем рассуждения о том, как можно найти объем правильных многогранников в общем виде.

Попытайтесь сначала доказать, что если через центр каждой грани любого правильного многогранника провести прямую, перпендикулярную плоскости этой грани, то все проведенные прямые пересекутся в некоторой одной точке O , удаленной от всех граней данного многогранника на одно и то же расстояние, которое обозначим r . Точка O окажется центром сферы, вписанной в данный многогранник, а r — ее радиусом. Соединив полученную точку O со всеми вершинами данного многогранника, мы разобьем его на Γ равных между собой пирамид (Γ — число граней правильного многогранника): основаниями образованных пирамид служат грани данного правильного многогранника, а высоты пирамид равны r . Тогда объем данного многогранника равен сумме объемов всех этих пирамид. Так как многогранник правильный, то его объем V можно найти по формуле:

$$V = \frac{1}{3} r \cdot S_{\text{полн.поверх}}. \quad (1)$$

Остается найти длину радиуса r . Для этого, соединив точку O с серединой K ребра многогранника, попробуйте убедиться, что наклонная KO к грани многогранника, содержащей ребро, составляет с плоскостью этой грани угол, равный половине ве-

личины β двугранного угла при этом ребре многогранника; проекция же наклонной KO на плоскость этой грани принадлежит ее апофеме и равна радиусу вписанной в нее окружности. Тогда

$$r = r_{\text{впис.окр}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{S_{\text{грани}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{p}, \quad (2)$$

где p — полупериметр грани. Тогда из (1) и (2) получаем общую для всех правильных многогранников формулу вычисления их объемов:

$$V = \frac{\Gamma \cdot S_{\text{грани}}^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{3 \cdot p}. \quad (3)$$

Эта формула совершенно не нужна для нахождения объемов куба, правильных тетраэдра и октаэдра, но позволяет довольно легко находить объемы правильных икосаэдра и додекаэдра.

Вид многогранника	Объем многогранника
Правильный тетраэдр	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$
Правильный октаэдр	$\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$
Куб	a^3
Правильный икосаэдр	$\frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}$
Правильный додекаэдр	$\frac{a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4}$

Все эти таблицы и формулы приведены, естественно, не для запоминания. Нам кажется интересным сам процесс нахождения различных величин, связанных с правильными многогранниками.

В последствии мы найдем и радиус описанной около правильного многогранника сферы, и радиус сферы, касающейся всех его ребер.

О других замечательных свойствах правильных многогранников вы можете прочесть в наших «Дополнениях» и в различных книгах по стереометрии.



§ 16. Фигуры вращения

16.1. Поверхность вращения

При вращении пространства вокруг оси l на угол $\varphi = 360^\circ$ любая точка $M \notin l$ пространства описывает окружность, расположенную в плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно оси вращения l (см. рис. 32); центр окружности есть точка пересечения этой плоскости и прямой l .

Пусть линия m расположена в одной из полуплоскостей плоскости β , образованных прямой l (рис. 128, а). При вращении линии m вокруг оси l на угол 360° каждая точка этой линии описывает окружность с центром на прямой l ; плоскость окружности перпендикулярна оси вращения l . Линия m при этом вращении опишет некоторую поверхность F , которую называют *поверхностью вращения* (рис. 128, б).

Поверхность, которая с каждой своей точкой содержит всю окружность, образованную при вращении этой

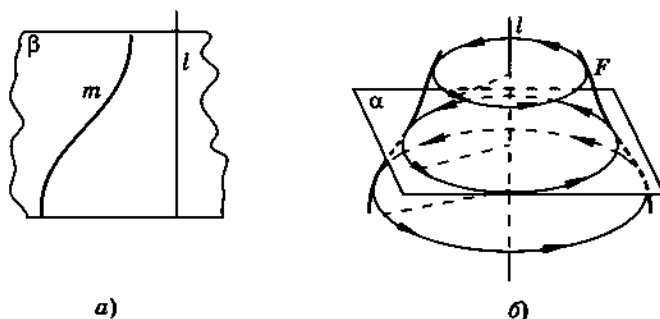


Рис. 128

точки вокруг некоторой прямой l , называется *поверхностью вращения*. Прямая l при этом называется *осью поверхности вращения*.

На основании определения в сечении поверхности вращения плоскостью, перпендикулярной ее оси, получается окружность (или точка), которая называется *параллелью*. Плоскость, проходящая через ось поверхности вращения, пересекает эту поверхность по линии, которая называется *меридианом*. Так как поворот вокруг прямой на угол 180° есть симметрия относительно этой прямой, то меридиан — плоская линия, симметричная относительно оси поверхности вращения.

Так как через каждую точку поверхности вращения (не лежащую на оси) можно провести лишь одну плоскость, перпендикулярную ее оси, и лишь одну плоскость, проходящую через эту ось, то через каждую точку поверхности вращения проходит только одна параллель и только один меридиан. В таком случае говорят, что параллели и меридианы образуют на поверхности вращения две системы линий кривизны (или образуют координатную сеть).

Поверхностью, образованной при вращении полуокружности вокруг прямой, содержащей ее диаметр, является сфера или сферическая поверхность (рис. 129, а, б).

Глобус — модель земного шара, дающая изображение всей земной поверхности, — является примером сферической поверхности. Через каждую точку поверхности глобуса Земли проходит одна параллель и один меридиан.

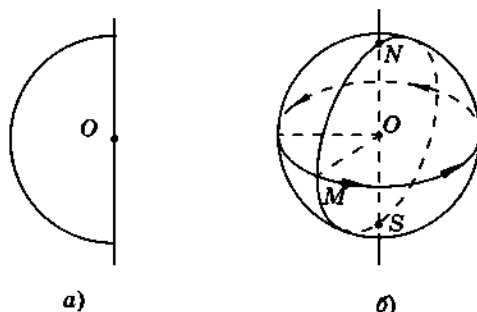


Рис. 129

16.2. Тело вращения

Если отрезок OM перпендикулярен прямой l и $O \in l$ (рис. 130, а), то при вращении этого отрезка вокруг оси l образуется круг, лежащий в плоскости, перпендикулярной прямой l ; центр круга есть точка O .

Пусть в полуплоскости с границей l плоскости β расположена плоская фигура F (рис. 130, б). Тогда при вращении фигуры F вокруг прямой l образуется геометрическое тело, которое называют *телом вращения* (рис. 130, в).

Определение. Тело, образованное при вращении плоской ограниченной замкнутой фигуры вокруг прямой, лежащей в плоскости этой фигуры и не содержащей ее внутренних точек, называется телом вращения.

Прямая l называется *осью тела вращения*. *Граница тела вращения называется его поверхностью*; она образуется при вращении границы плоской фигуры (точки границы плоской фигуры, лежащие на оси вращения, являются внутренними точками тела вращения).

Сечение тела (*поверхности*) вращения плоскостью, перпендикулярной оси этого тела (*этой поверхности*), называется *перпендикулярным сечением тела (поверхности) вращения*.

Перпендикулярным сечением тела (*поверхности*) вращения может быть круг (окружность) с центром в точке пересечения секущей плоскости и оси этого тела (*этой поверхности*).

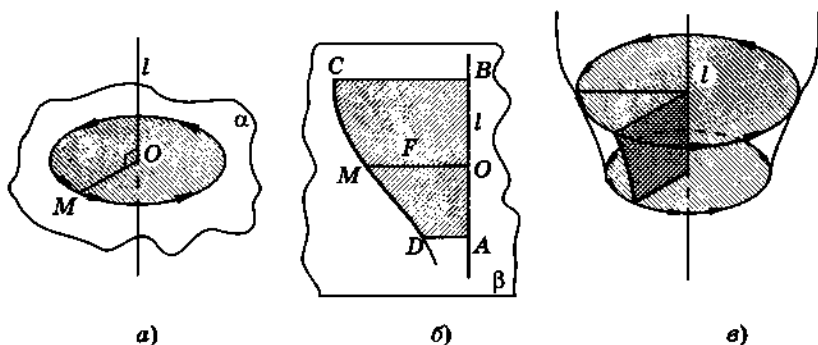
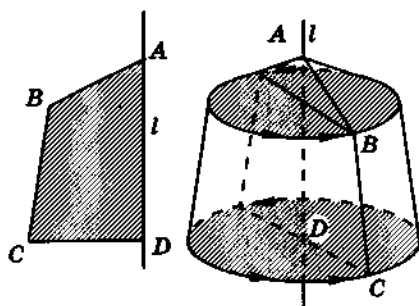
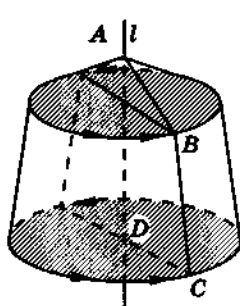


Рис. 130

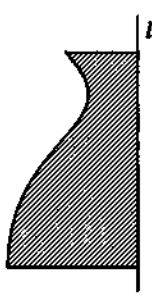


a)

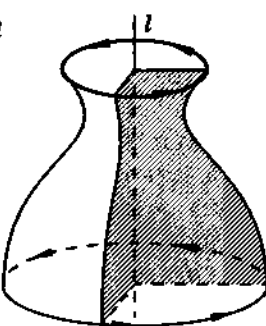


б)

Рис. 131

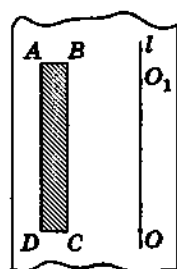


a)

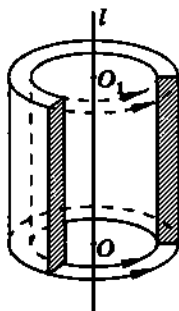


б)

Рис. 132

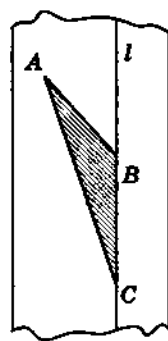


a)

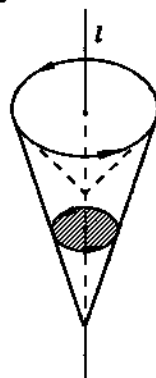


б)

Рис. 133

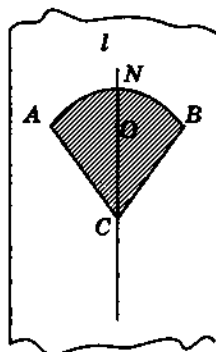


a)

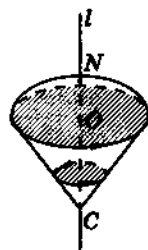


б)

Рис. 134

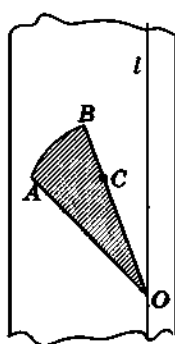


a)

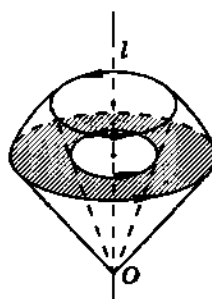


б)

Рис. 135

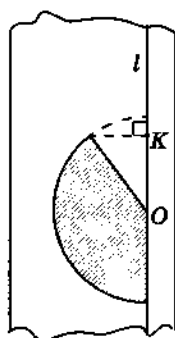


a)

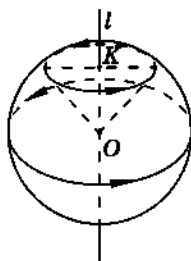


б)

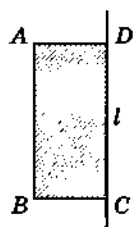
Рис. 136



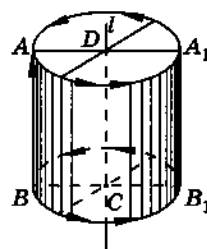
а)



б)



а)



б)

Рис. 137

Рис. 138

сти) или точка, а может быть кольцо (рис. 133, 136), ограниченное двумя concentric окружностями с центром на оси вращения.

На рисунках 131, а — 137, а изображены плоские фигуры, при вращении которых образуются соответствующие тела вращения (рис. 131, б — 137, б).

Сечение тела вращения плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением этого тела*. Поскольку поворот вокруг прямой на угол 180° есть симметрия относительно этой прямой, то *осевым сечением тела вращения является фигура, симметричная относительно его оси*.

§ 17. Цилиндр

17.1. Определение цилиндра и его элементов

Определение. Тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, называется *цилиндром* (рис. 138).

Круги, образованные вращением сторон прямоугольника, перпендикулярных оси вращения, называются *основаниями цилиндра (верхним и нижним)*. Так как противоположные стороны прямоугольника равны, то основаниями цилиндра являются *равные круги*.

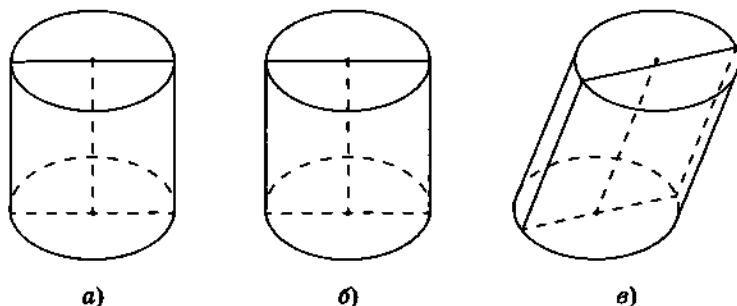


Рис. 139

Поверхность, образованная вращением стороны прямоугольника, параллельной оси вращения, называется **боковой поверхностью цилиндра**, а ее площадь — **площадью боковой поверхности цилиндра** и обозначается $S_{\text{бок}}$. Объединение боковой поверхности цилиндра и двух его оснований называется **полной поверхностью цилиндра**, а ее площадь обозначается $S_{\text{полн}}$. Таким образом,

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}. \quad (1)$$

Высотой цилиндра называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания цилиндра к плоскости другого. *Длину этого перпендикуляра называют высотой цилиндра.* Отрезок, соединяющий точки окружностей оснований и перпендикулярный к их плоскостям, называется **образующей цилиндра вращения**. Отрезок оси вращения, заключенный внутри цилиндра, называется **осью цилиндра**.

 Образующие цилиндра вращения перпендикулярны плоскостям его оснований, а в основании цилиндра круг, поэтому такой цилиндр называется **прямым круговым цилиндром** (рис. 139, а).

Если основания прямого кругового цилиндра подвергнуть сжатию так, чтобы окружность основания преобразовалась в эллипс, то получим цилиндр, который называется **эллиптическим цилиндром** (рис. 139, б).

Так как окружность при параллельном проектировании изображается эллипсом, то изображения кругового и эллиптического цилиндров совпадают.

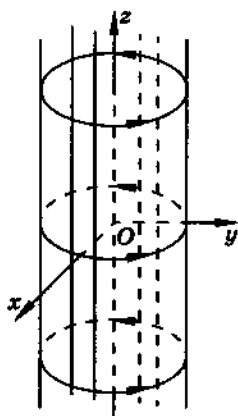


Рис. 140

Цилиндр, образующие которого не перпендикулярны плоскостям его оснований, называется *наклонным цилиндром* (рис. 139, в).

Нам предстоит изучать лишь прямой круговой цилиндр, поэтому слова «прямой круговой» опускаем.

Поверхность, образованную вращением прямой, параллельной оси вращения, называют *цилиндрической поверхностью вращения* (рис. 140).

Уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) задает цилиндрическую поверхность вращения с осью вращения Oz и радиусом основания r . Из этого уравнения следует, что цилиндрическая поверхность является поверхностью второго порядка. (Подробнее о поверхностях второго порядка можно прочитать в «Дополнениях» в конце этой книги.)

17.2. Свойства цилиндра

а) **Сечения цилиндра плоскостью.** Так как цилиндр является телом вращения, то любое его перпендикулярное сечение есть круг, а перпендикулярное сечение боковой поверхности цилиндра — окружность; центры этих окружностей и кругов — точки пересечения секущих плоскостей и оси цилиндра (рис. 141).

Если секущая плоскость пересекает ось цилиндра и не перпендикулярна ей, то в сечении может получиться эллипс (рис. 142) или его некоторая часть (рис. 143, 144). Это следует из того, что параллельной проекцией окружности на плоскость, не

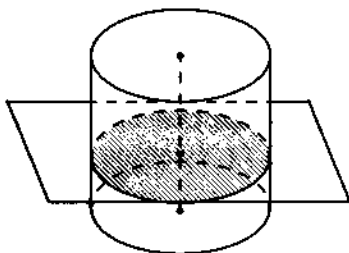


Рис. 141

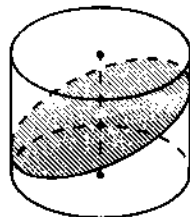


Рис. 142

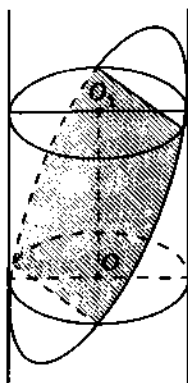


Рис. 143

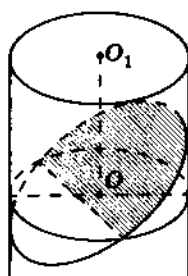


Рис. 144

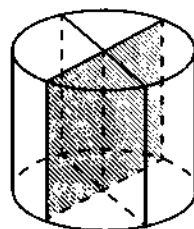


Рис. 145

параллельную плоскости окружности, является эллипс. (Вспомните: наклонив цилиндрический стеклянный сосуд с водой, вы видите на поверхности воды эллипс или его часть.)

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется **осевым сечением цилиндра**. Так как поворот пространства вокруг прямой на угол 180° является осевой симметрией относительно оси вращения, то ось прямого кругового цилиндра является его осью симметрии. Значит, осевым сечением цилиндра вращения является прямоугольник, стороны которого равны диаметру основания и образующей цилиндра (рис. 145). При этом все осевые сечения цилиндра — равные между собой прямоугольники.

Цилиндр, осевое сечение которого — квадрат, называют **равносторонним цилиндром** (рис. 146).

Так как все образующие цилиндра равны и параллельны друг другу, то любое сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть прямоугольник, высота которого равна образующей цилиндра (рис. 147).

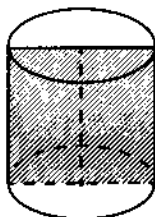


Рис. 146

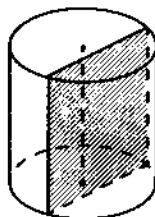


Рис. 147

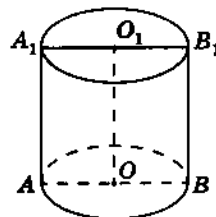


Рис. 148

б) **Изображение цилиндра.** Чтобы построить изображение цилиндра, достаточно построить: 1) прямоугольник ABB_1A_1 и его ось OO_1 (рис. 148); 2) два равных эллипса, центрами которых являются точки O и O_1 и осями — отрезки AB и A_1B_1 . Выделив штрихами невидимые линии, получаем искомое изображение цилиндра.

в) **Касательная плоскость к цилиндру.**

Определение. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно плоскости осевого сечения, проведенной через эту образующую, называется касательной плоскостью к цилиндру (рис. 149).

Говорят, что плоскость α касается цилиндра (*цилиндрической поверхности*) по образующей DD_1 , каждая точка образующей DD_1 является точкой касания плоскости α и данного цилиндра.

Через любую точку боковой поверхности цилиндра проходит только одна его образующая. Через эту образующую можно провести только одно осевое сечение и только одну плоскость, перпендикулярную плоскости этого осевого сечения. Следовательно, через каждую точку боковой поверхности цилиндра можно провести лишь одну плоскость, касательную к данному цилиндру в этой точке.

17.3. Развертка и площадь поверхности цилиндра

Следует заметить, что развертка поверхности вращения — понятие в определенной мере интуитивное. К тому же, не для каждой поверхности тела вращения можно построить ее развертку. Иными словами, не каждую поверхность можно «раз-

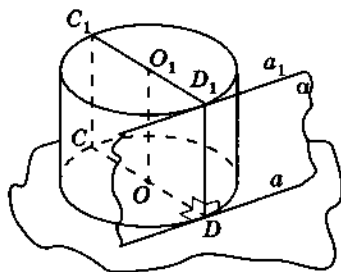


Рис. 149

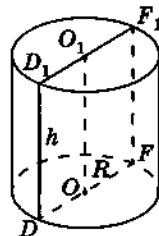


Рис. 150



Рис. 151

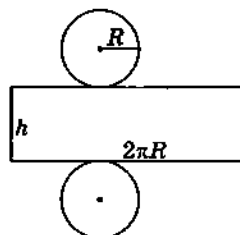


Рис. 152

вернуть» на плоскости. Например, не существует развертки сферы (см. раздел «Дифференциальная геометрия» в конце этой книги).

Развертку цилиндра мы также введем на интуитивном уровне.

Пусть R — радиус основания, h — высота цилиндра.

Полная поверхность цилиндра состоит из его боковой поверхности и двух оснований — равных кругов. Если эту поверхность «разрезать» по образующей DD_1 (рис. 150) и по окружностям оснований, затем боковую поверхность развернуть на плоскости (рис. 151), то получим развертку полной поверхности цилиндра, состоящую из прямоугольника и двух равных кругов, касающихся противоположных сторон этого прямоугольника (рис. 152).

Попробуйте изготовить развертку цилиндра и склеить из нее цилиндр.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки, т. е. площадь боковой поверхности цилиндра равна площади прямоугольника, у которого одна сторона равна длине окружности основания цилиндра, а другая сторона — высоте цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h.$$

Таким образом, доказана

Теорема 25. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.

Площадь круга радиусом R равна πR^2 , поэтому $S_{\text{осн}} = \pi R^2$. Тогда для нахождения площади полной поверхности цилиндра справедливо:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h).$$

Следствие. Пусть цилиндр образован вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг его высоты AD (рис. 153). Тогда

$$S_{\text{бок}} = 2\pi DC \cdot BC. \quad (1)$$

Если EF — срединный перпендикуляр к образующей BC , проведенный из точки F оси l цилиндра, то $EF = CD$. Учитывая, что $BC = AD$, получаем: $S_{\text{бок}} = 2\pi EF \cdot AD$, т. е. боковая поверхность цилиндра равна произведению высоты цилиндра на длину окружности, радиус которой равен длине срединного перпендикуляра его образующей, проведенного из точки оси цилиндра.

Это следствие найдет свое применение в п. 19.7.

17.4. Призмы, вписанные в цилиндр и описанные около цилиндра

Нам предстоит решать задачи, в которых рассматриваются многогранники, вписанные в фигуры вращения и описанные около них.

Для правильного и наглядного изображения конфигураций из таких многогранников и фигур вращения необходимо верно изображать правильные многоугольники, вписанные в окружность (круг) или описанные около нее.

Определение. Призма называется вписанной в цилиндр, если основания призмы вписаны в основания цилиндра (рис. 154).

Цилиндр в этом случае называют *описанным около призмы*.

Боковые ребра призмы соединяют соответственные вершины ее оснований, вписанных в основания цилиндра. Эти вер-

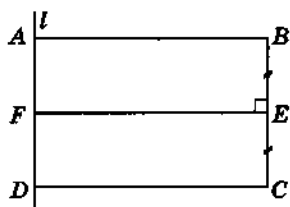


Рис. 153

шины лежат на окружностях оснований цилиндра. Образующие цилиндра соединяют соответственные точки окружностей его оснований и параллельны боковым ребрам призмы. Следовательно, боковые ребра вписанной в цилиндр призмы — образующие цилиндра.

Определение. Призма называется описанной около цилиндра, если основания призмы описаны около оснований цилиндра.

Цилиндр при этом называют *вписанным в призму* (рис. 155).

Так как соответственные стороны оснований призмы параллельны друг другу и перпендикулярны радиусам оснований цилиндра, проведенным в точки касания, то плоскости боковых граней призмы являются касательными плоскостями к цилиндру: эти плоскости касаются поверхности цилиндра по образующим, соединяющим точки, в которых стороны оснований призмы касаются окружностей оснований цилиндра.

При изображении правильных призм, вписанных в цилиндр, следует руководствоваться алгоритмами построений изображений правильных многоугольников, вписанных в окружность.

Итак, для построения изображения правильной призмы, вписанной в цилиндр: 1) строим изображение цилиндра; 2) строим изображение правильного многоугольника, вписанного в верхнее основание цилиндра; 3) через вершины построенного вписанного многоугольника проводим образующие цилиндра; 4) в нижнем основании цилиндра последовательно соединяем концы этих образующих; 5) выделяем видимые и невидимые линии (отрезки) изображаемых фигур.

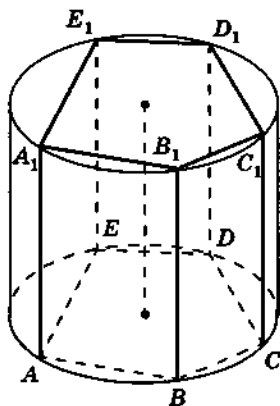


Рис. 154

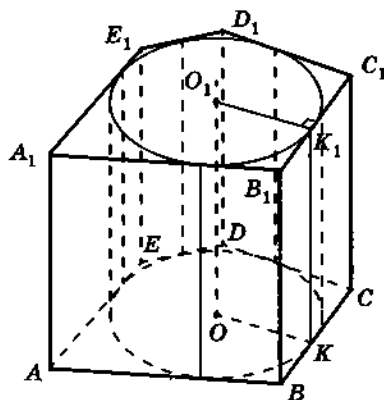


Рис. 155

На рисунке 156 изображены вписанные в цилиндр: призма, в основании которой прямоугольный треугольник (рис. 156, а); правильная четырехугольная призма (рис. 156, б); правильная треугольная призма (рис. 156, в); правильная шестиугольная призма (рис. 156, г).

■ ЗАДАЧА (3.029). Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра равна $a\sqrt{2}$. Найдите площади боковой и полной поверхностей правильной призмы, вписанной в этот цилиндр, если призма: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

Решение. Рассмотрим случай а). Пусть в равносторонний цилиндр вписана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 157); CDD_1C_1 — осевое сечение; $OO_1 = h$ — высота цилиндра; $OC = R$ — радиус основания цилиндра.

Так как цилиндр — равносторонний, то CDD_1C_1 — квадрат, значит, высота цилиндра равна диаметру его основания. Тогда в квадрате CDD_1C_1 находим $CD = \frac{CD_1}{\sqrt{2}} = a = h$.

Далее, $\triangle ABC$ — правильный, вписанный в основание, радиус которого $R = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$. Значит, сторона AB и высота CE этого треугольника равны: $AB = R\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CE = \frac{3}{2}R = \frac{3}{4}a$.

Откуда $S_{\text{осн}} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$; $S_{\text{бок}} = 3S_{ABB_1A_1} = 3AB \cdot BB_1 =$

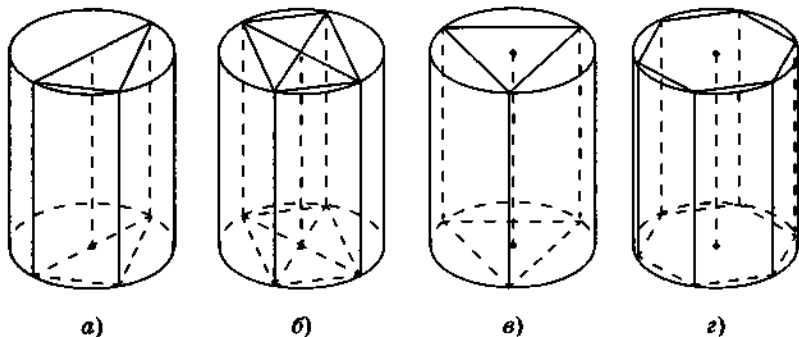


Рис. 156

$$= 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}. \text{ Тогда } S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}a^2}{8}.$$

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$; $\frac{15\sqrt{3}a^2}{8}$.

■ ЗАДАЧА (3.032). В равносторонний цилиндр, высота которого равна a , вписана правильная призма. Найдите расстояние и угол между диагональю боковой грани призмы и осью цилиндра, если призма: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

Решение. Рассмотрим случай б). Пусть $ABCD_1B_1C_1D_1$ — вписанная в цилиндр, правильная призма (рис. 158). Найдём расстояние и угол между осью OO_1 цилиндра и скрещивающейся с ней (почему?) диагональю AB_1 боковой грани ABB_1A_1 данной призмы.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проведенными через эти прямые.

Если E — середина AD , то расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и OO_1 равно расстоянию между плоскостью грани ABB_1A_1 и параллельной ей (почему?) плоскостью сечения EFF_1E_1 . Это расстояние равно длине отрезка OK (где K — середина AB), так как $OK \perp (ABB_1)$ и $(ABB_1) \parallel (EFF_1)$.

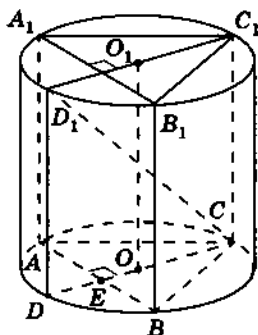


Рис. 157

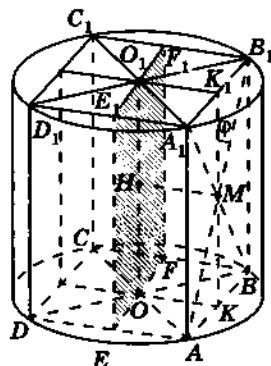


Рис. 158

Поскольку данный цилиндр — равносторонний, то BDD_1B_1 — квадрат со стороной $BD = BB_1 = a$. Тогда $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Значит, $OK = AE = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ — искомое расстояние между прямыми OO_1 и AB_1 .

Обозначим $\angle(OO_1; AB_1) = \varphi$, $M = AB_1 \cap A_1B$. Для нахождения угла φ проведем в грани ABB_1A_1 прямую $KK_1 \parallel OO_1$. Тогда $\varphi = \angle(OO_1; AB_1) = \angle(KK_1; AB_1)$. Так как $KK_1 \parallel OO_1$, $OO_1 \perp (ABC)$, то $MK \perp AB$. Поэтому $\triangle AKM$ — прямоугольный. В этом треугольнике $AK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $KM = \frac{a}{2}$. Значит, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{AK}{KM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: б) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

 Во многих пособиях по геометрии за площадь боковой поверхности цилиндра принимают предел последовательности боковых поверхностей правильных вписанных в цилиндр (или описанных около цилиндра) n -угольных призм при $n \rightarrow +\infty$.

Действительно, $S_{\text{бок.пов.призм}} = h \cdot P_{\text{осн.призм}}$, где $P_{\text{осн.призм}}$ — периметр основания призмы, h — ее высота. Для правильных вписанных в цилиндр призм h — постоянная величина, равная высоте цилиндра, а предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность (основание цилиндра), равен длине этой окружности. Таким образом, мы вновь получаем: $S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$. 

17.5. Объем цилиндра

Напомним принятое нами соглашение, основанное на принципе Кавальери.

«Пусть даны два тела и плоскость. Если каждая плоскость, параллельная данной плоскости и пересекающая одно из данных тел, пересекает также и другое, причем площади сечений, образованных при пересечении обоих тел, относятся как $m : n$, то и объемы этих тел относятся как $m : n$ ».

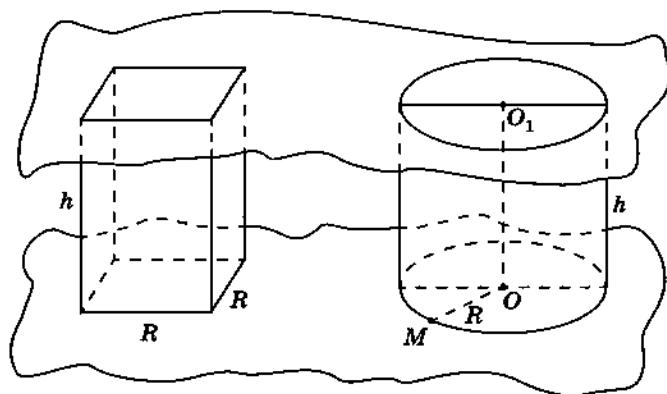


Рис. 159

Расположим цилиндр, имеющий высоту h и радиус основания R , и прямоугольный параллелепипед с ребрами h , R , R так, чтобы их основания находились на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно h (рис. 159). Каждая плоскость, параллельная данным плоскостям и пересекающая цилиндр, пересекает также прямоугольный параллелепипед, причем площади образованных при пересечении обоих тел сечений относятся как $\pi \cdot R^2 : R^2 = \pi : 1$. Тогда и для объемов этих тел справедливо: $V_{\text{цил}} : V_{\text{парал}} = \pi : 1$ или $V_{\text{цил}} : (R^2 \cdot h) = \pi : 1$, откуда

$$V_{\text{цил}} = \pi \cdot R^2 \cdot h.$$

Если цилиндр высотой h пересечь плоскостью, параллельной его оси, то цилиндр разобьется на два тела (рис. 160). Объемы этих тел относятся как площади сегментов, образовавшихся в основании цилиндра (докажите это на основании принципа Кавальери). Следовательно, объем каждого из этих тел может быть вычислен по формуле

$$V = S_{\text{сегм}} \cdot h.$$

Любая плоскость, проведенная через середину оси цилиндра, разбивает этот цилиндр на два равновеликих тела (рис. 161), объем V каждого из которых равен половине объема данного цилиндра, т. е. $V = \frac{1}{2} \pi \cdot R^2 \cdot h$.

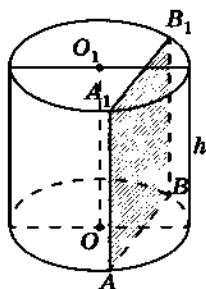


Рис. 160

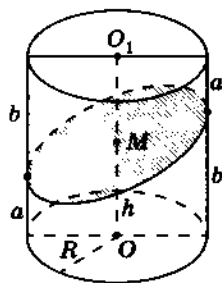


Рис. 161

Попробуйте, исходя из этой формулы, доказать, что в таком случае объем каждой части цилиндра (см. рис. 161) может быть вычислен по формуле:

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot R^2 \cdot (a + b),$$

где a и b — длины отрезков, на которые образующая цилиндра делится секущей плоскостью.

§ 18. Конус

18.1. Определение конуса и его элементов

Определение. Тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет, называется **прямым круговым конусом** (рис. 162, 163).

Отрезок оси вращения, заключенный внутри конуса, называется **осью конуса**.

Круг, образованный при вращении второго катета, называется **основанием конуса**. Длина этого катета называется **радиусом основания конуса** или, короче, **радиусом конуса**. Вершина острого угла вращающегося треугольника, лежащая на оси вращения, называется **вершиной конуса**. На рисунках 162, б и 163 вершиной конуса является точка P .

Высотой конуса называется отрезок, проведенный из вершины конуса перпендикулярно его основанию. Длину этого перпендикуляра также называют высотой конуса. Высота ко-

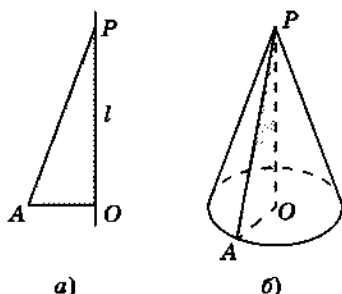


Рис. 162

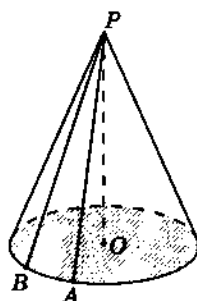


Рис. 163

нуса имеет своим основанием центр круга — основания конуса — и совпадает с осью конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности его основания, называются **образующими конуса**. Все образующие конуса равны между собой (почему?).

Как и в случае с цилиндром, можно рассматривать конус в более широком, чем у нас, понимании, когда в основании конуса может быть, например, эллипс (эллиптический конус), парабола (параболический конус). Мы будем изучать только определенный выше **прямой круговой конус** (конус вращения), поэтому слова «прямой круговой» мы будем опускать.

Поверхность, полученная при вращении гипотенузы, называется **боковой поверхностью конуса**, а ее площадь — **площадью боковой поверхности конуса** и обозначается $S_{\text{бок}}$. Боковая поверхность конуса является объединением всех его образующих.

Объединение боковой поверхности конуса и его основания называется **полной поверхностью конуса**, а ее площадь называется **площадью полной поверхности конуса**, или, короче, площадью поверхности конуса и обозначается $S_{\text{кон}}$. Из этого определения следует, что

$$S_{\text{кон}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

Если вокруг данной прямой — оси — вращать пересекающую ее прямую, то при этом вращении образуется поверхность, которую называют **круговой конической поверхностью** или **конической поверхностью вращения**. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

задает коническую поверхность вращения

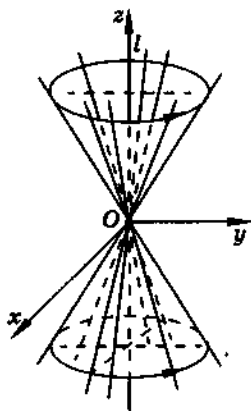


Рис. 164

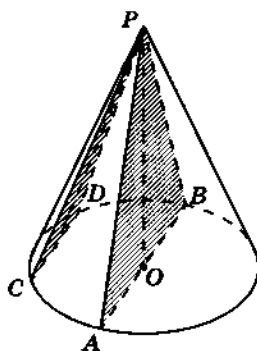


Рис. 165

с осью вращения Oz (рис. 164). Из этого уравнения следует, что коническая поверхность является поверхностью второго порядка. (Подробнее о поверхностях второго порядка можно прочитать в «Дополнениях» — в конце этой книги.)

18.2. Сечения конуса

Определение. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется **осевым сечением конуса**.

Так как все образующие конуса равны, то его осевым сечением является равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого являются образующие конуса, а основанием — диаметр конуса. При этом все осевые сечения конуса — **равные равнобедренные треугольники**. На рисунке 165 осевым сечением конуса является треугольник ABP ($AP = BP$). Угол APB называют **углом при вершине осевого сечения конуса**.

Конус, в осевом сечении которого правильный треугольник, называется **равносторонним конусом**.

Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, пересекает конус, но не проходит через его ось, то в сечении конуса также получается равнобедренный треугольник (рис. 165: $\triangle DCP$).

Так как конус — тело вращения, то любое сечение конуса плоскостью, перпендикулярной его оси (т. е. параллельной основанию конуса), есть круг, а сечение боковой поверхности

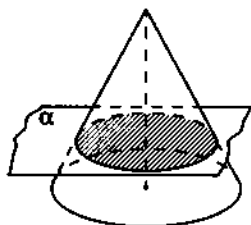


Рис. 166

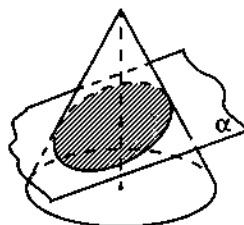


Рис. 167

конуса такой плоскостью — окружность этого круга; центром круга (окружности) является точка пересечения оси конуса и секущей плоскости (рис. 166).

Если секущая плоскость не параллельна плоскости основания конуса и не пересекает основание, то сечением боковой поверхности конуса такой плоскостью является эллипс (рис. 167). Поэтому *эллипс называют коническим сечением*.

Если сечением цилиндрической поверхности плоскостью может быть либо окружность, либо эллипс, либо две параллельные прямые, то сечением конической поверхности плоскостью может быть либо окружность (секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности вращения и не проходит через ее вершину, рис. 168, а), либо эллипс (секущая плоскость не перпендикулярна оси конической поверхности и пересекает все ее образующие, рис. 168, б), либо парабола (секущая плоскость параллельна только одной образующей конической поверхности, рис. 168, в), либо гипербола (секущая плоскость параллельна оси конической поверхности, рис. 168, г), либо пара пересекающихся прямых (секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности,

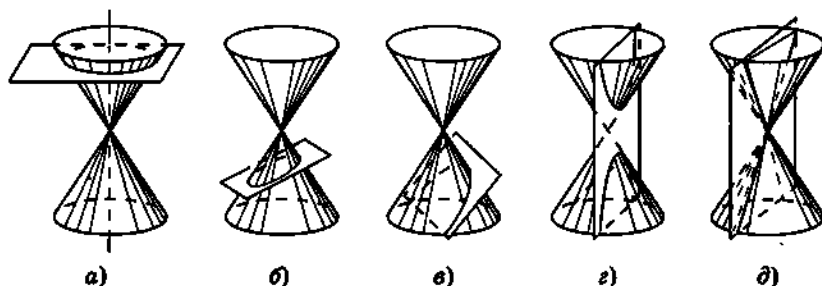


Рис. 168

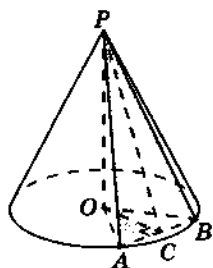


Рис. 169

рис. 168, д). Поэтому невырожденные кривые второго порядка — окружность, эллипс, параболу и гиперболу называют **коническими сечениями** или коротко — **кониками**.

О конических сечениях можно прочесть в очерках «Элементарная геометрия», «Проективная геометрия» в конце этой книги. 

■ **ЗАДАЧА (3.047).** Высота конуса равна радиусу R его основания. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу: а) в 60° ; б) в 90° . Найдите площадь сечения.

Решение. Рассмотрим случай а). Пусть плоскость α пересекает поверхность конуса с вершиной P по образующим PA и PB (рис. 169); $\triangle ABP$ — искомое сечение. Найдём площадь этого сечения.

Хорда AB окружности основания стягивает дугу в 60° , значит, $\triangle AOB$ — правильный и $AB = R$.

Если точка C — середина стороны AB , то PC — высота треугольника ABP . Поэтому $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot PC$. Имеем: $OP = R$ (по условию); в $\triangle AOB$: $OC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; в $\triangle OCP$: $CP = \sqrt{OC^2 + OP^2} = \frac{R\sqrt{7}}{2}$. Тогда $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot PC = \frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: а) $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

18.3. Касательная плоскость к конусу

Определение. Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую.

Говорят, что *плоскость α касается конуса по образующей PA* (рис. 170): каждая точка образующей PA является точкой касания плоскости α и данного конуса.

Через любую точку боковой поверхности конуса проходит только одна его образующая. Через эту образующую можно провести только одно осевое сечение и только одну плоскость,

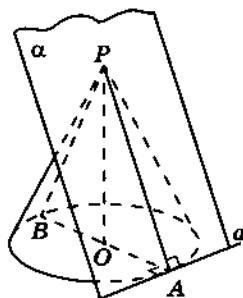


Рис. 170

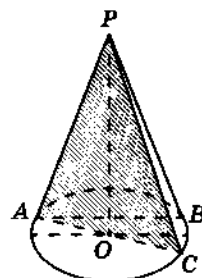


Рис. 171

перпендикулярную плоскости этого осевого сечения. Следовательно, *через каждую точку боковой поверхности конуса можно провести лишь одну плоскость, касательную к данному конусу в этой точке.*

18.4. Изображение конуса

Для изображения конуса достаточно построить: 1) эллипс, изображающий окружность основания конуса (рис. 171); 2) центр O этого эллипса; 3) отрезок OP , изображающий высоту конуса; 4) касательные прямые PA и PB из точки P к эллипсу (их проводят с помощью линейки на глаз).

Для достижения наглядности изображения невидимые линии изображают штрихами.

Необходимо заметить, что отрезок AB , соединяющий точки касания образующих и окружности основания конуса, ни в коем случае не является диаметром основания конуса, т. е. этот отрезок не содержит центра O эллипса. Следовательно, $\triangle ABP$ — не осевое сечение конуса. Осевым сечением конуса является $\triangle ACP$, где отрезок AC проходит через точку O , но образующая PC не является касательной к окружности основания.

18.5. Развертка и площадь поверхности конуса

Пусть l — длина образующей, R — радиус основания конуса с вершиной P .

Поверхность конуса состоит из боковой поверхности конуса и его основания. Если эту поверхность разрезать по одной

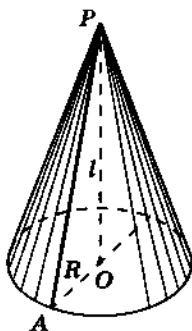
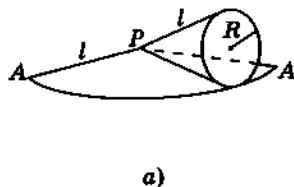
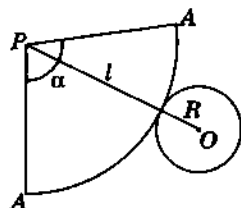


Рис. 172



а)



б)

Рис. 173

из образующих, например по образующей PA (рис. 172), и по окружности основания, затем боковую поверхность конуса развернуть на плоскости (рис. 173, а), то получим развертку поверхности конуса (рис. 173, б), состоящую из: а) кругового сектора, радиус которого равен образующей l конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса; б) круга, радиус которого равен радиусу R основания конуса. Угол сектора развертки боковой поверхности конуса называют *углом развертки конуса*; его численная величина равна отношению длины окружности основания конуса к его образующей (радиусу сектора развертки):

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot R}{l}.$$

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь боковой поверхности конуса через длину l его образующей и радиус R основания.

Площадь боковой поверхности — площадь кругового сектора радиуса l — вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \alpha \cdot l^2, \quad (1)$$

где α — величина угла (в радианах) сектора — развертки.

Учитывая, что $\alpha = \frac{2\pi \cdot R}{l}$, получаем:

$$S_{\text{бок}} = \pi R l. \quad (2)$$

Таким образом, доказана

Теорема 26. Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его боковой поверхности и основания, т. е.

$$S_{\text{кон}} = \pi Rl + \pi R^2. \quad (3)$$

Следствие. Пусть конус образован вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AC (рис. 174). Тогда $S_{\text{бок}} = \pi \cdot BC \cdot AB$. Если D — середина отрезка AB , то $AB = 2AD$, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 2\pi BC \cdot AD. \quad (4)$$

Проведем $DE \perp AC$ ($E \in l = AC$). Из подобия прямоугольных треугольников ADE и ACB (у них общий угол A) имеем

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow BC \cdot AD = DE \cdot AC. \quad (5)$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$S_{\text{бок}} = (2\pi \cdot DE) \cdot AC, \quad (6)$$

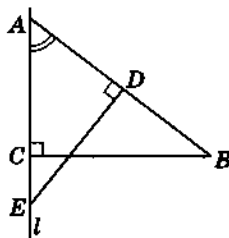


Рис. 174

т. е. площадь боковой поверхности конуса равна произведению высоты конуса на длину окружности, радиус которой равен длине срединного перпендикуляра, проведенного из точки на оси конуса к его образующей.

Это следствие будет использовано в п. 19.7.

18.6. Свойства параллельных сечений конуса

Теорема 27. Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то:

- 1) все образующие и высота конуса делятся этой плоскостью на пропорциональные части;
- 2) в сечении получается круг, подобный основанию;
- 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

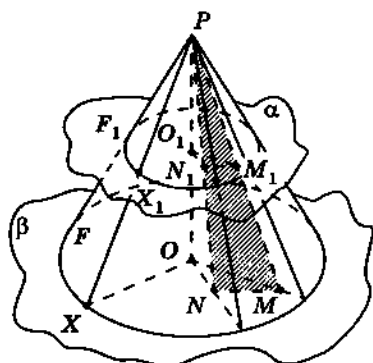


Рис. 175

Доказательство. 1) Пусть конус с вершиной P и основанием F пересечен плоскостью α , параллельной плоскости β основания конуса и расположенной между P и β (рис. 175).

Проведем высоту PO конуса, где O — центр круга F . Так как $PO \perp \beta$, $\alpha \parallel \beta$, то $\alpha \perp PO$. Значит, в сечении конуса плоскостью α получается круг с центром $O_1 = \alpha \cap PO$. Обозначим этот круг F_1 .

Рассмотрим гомотетию H_P^k с центром P , при которой плоскость β основания данного конуса отображается на параллельную ей плоскость α (при гомотетии плоскость, не проходящая через центр гомотетии, отображается на параллельную ей плоскость).

Так как при гомотетии ее центр является неподвижной точкой, прямая, проходящая через центр гомотетии, отображается на себя, а пересечение двух фигур — на пересечение их образов, то гомотетия H_P^k отображает основание F конуса на его параллельное сечение — круг F_1 , при этом центр O основания отображается на центр O_1 круга F_1 (почему?). Кроме того, если PX — произвольная образующая конуса, где X — точка окружности основания, то при гомотетии H_P^k точка X отображается на точку $X_1 = PX \cap \alpha$. Учитывая, что отношение длин гомотетичных отрезков равно коэффициенту гомотетии, получаем:

$$\frac{PX_1}{PX} = \frac{PO_1}{PO} = k, \quad (*)$$

где k — коэффициент гомотетии H_P^k , т. е. параллельное сечение конуса делит его образующие и высоту на пропорциональные части. А поскольку гомотетия является подобием, то круг F_1 , являющийся параллельным сечением конуса, подобен его основанию.

Вследствие того, что отношение площадей гомотетичных фигур равно квадрату коэффициента гомотетии и $k = PO_1 : PO$,

где PO_1 и PO — расстояния соответственно параллельного сечения и основания пирамиды от ее вершины, то

$$S_{\text{сечен}} : S_{\text{основ}} = k^2 = PO_1^2 : PO^2.$$

Теорема доказана. ▼

18.7. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды

Определение. Пирамида называется вписанной в конус, если у них вершина общая, а основание пирамиды вписано в основание конуса. В этом случае конус называется описанным около пирамиды.

Для построения изображения правильной пирамиды, вписанной в конус:

- строят изображение основания пирамиды — правильного многоугольника, вписанного в основание конуса;
- соединяют отрезками прямых вершину конуса с вершинами построенного многоугольника;
- выделяют видимые и невидимые (штрихами) линии изображаемых фигур.

На рисунках 176—179 изображены вписанные в конус: пирамида, в основании которой лежат:

- прямоугольный треугольник (см. рис. 176);
- правильная треугольная (см. рис. 177);
- правильная четырехугольная (см. рис. 178);
- правильная шестиугольная (см. рис. 179) пирамиды.

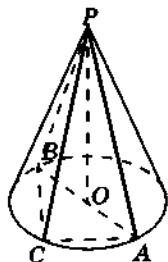


Рис. 176

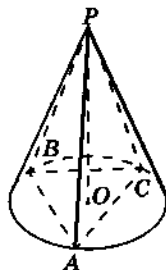


Рис. 177

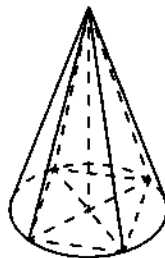


Рис. 178

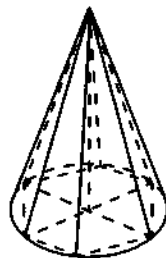


Рис. 179

Определение. Пирамида называется описанной около конуса, если у них вершина общая, а основание пирамиды описано около основания конуса. В этом случае конус называют вписанным в пирамиду (рис. 180).

■ **ЗАДАЧА (3.080).** В равносторонний конус вписана правильная пирамида. Найдите отношение площадей боковых поверхностей пирамиды и конуса, если пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная.

Решение. Рассмотрим случай а). Пусть R — радиус основания равностороннего конуса, $PABC$ — правильная пирамида, вписанная в этот конус (рис. 181); $\triangle DPE$ — осевое сечение конуса, CF — медиана $\triangle ABC$. Тогда в $\triangle ABC$ (правильный):

$$AB = R\sqrt{3}, OF = \frac{1}{2}R; \text{ в } \triangle DPE \text{ (правильный): } OP = \frac{DE\sqrt{3}}{2} =$$

$$= R\sqrt{3}; \text{ в } \triangle OPF (\angle FOP = 90^\circ): PF = \sqrt{OF^2 + OP^2} = \frac{R\sqrt{13}}{2}.$$

Так как CF — медиана $\triangle ABC$, то PF — высота равнобедренного треугольника ABP . Поэтому $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PF =$
 $= \frac{1}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{R\sqrt{13}}{2} = \frac{R^2\sqrt{39}}{4}.$

Обозначим: S_1 — площадь боковой поверхности пирамиды, S_2 — площадь боковой поверхности конуса. Тогда

$$S_1 = 3S_{\triangle ABP} = \frac{3R^2\sqrt{39}}{4}, S_2 = \pi R \cdot PA = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2.$$

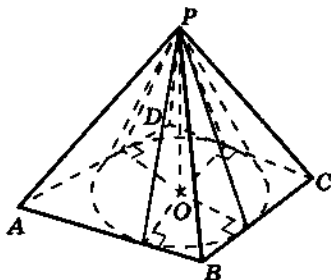


Рис. 180

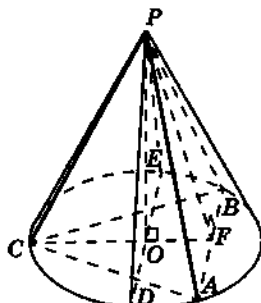


Рис. 181

Следовательно, $S_1 : S_2 = \frac{3R^2\sqrt{39}}{4} : 2\pi R^2 = \frac{3\sqrt{39}}{8\pi}$.

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{39}}{8\pi}$.

Во многих пособиях по геометрии за площадь боковой поверхности конуса принимают предел последовательности боковых поверхностей правильных вписанных в конус (или описанных около конуса) n -угольных пирамид при $n \rightarrow +\infty$.

Действительно, $S_{\text{бок.пов.пирам}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot P_{\text{осн.пирам}}$, где $P_{\text{осн.пирам}}$ — периметр основания пирамиды, a — апофема боковой грани. Для правильных описанных около конуса пирамид апофема a — постоянная величина, равная образующей l конуса, а предел последовательности периметров правильных многоугольников, описанных около окружности радиусом R основания конуса, равен $2\pi R$ — длине этой окружности. Таким образом, мы вновь получаем: $S_{\text{бок}} = \pi Rl$.

18.8. Усеченный конус

Пусть дан конус с вершиной P . Проведем плоскость α , параллельную плоскости основания конуса и пересекающую этот конус (рис. 182). Эта плоскость пересекает данный конус по кругу и разбивает его на два тела: одно из них является конусом, а другое (расположенное между плоскостью основания данного конуса и секущей плоскостью) называют **усеченным конусом**. Таким образом, усеченный конус представляет собой часть полного конуса, заключенную между его основанием и параллельной ему плоскостью. Основание данного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью α , называются **соответственно нижним и верхним основаниями усеченного конуса**. **Высотой усеченного конуса** называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания к плоскости другого. **Длину этого перпендикуляра также называют высотой усеченного конуса**. (Часто за высоту усеченного конуса принимают отрезок, соединяющий центры его оснований.)

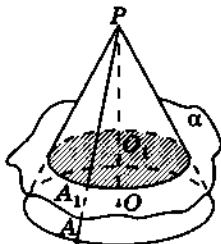


Рис. 182

Часть боковой поверхности данного конуса, ограничивающая усеченный конус, называется *боковой поверхностью усеченного конуса*, а отрезки образующих конуса, заключенные между основаниями усеченного конуса, называются *образующими усеченного конуса*. Так как все образующие данного конуса равны и равны все образующие отсеченного конуса, то равны все образующие усеченного конуса.

Построение изображения усеченного конуса следует начинать с изображения того конуса, из которого получился усеченный конус (рис. 183).

На рисунке 184 показана развертка усеченного конуса.

Из теоремы 27 следует, что основания усеченного конуса — подобные круги.

Определения усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус и описанной около него, аналогичны определениям пирамиды, вписанной в конус и описанной около него.

Заметим, что построение изображений усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус и описанной около него, следует начинать с изображений того конуса или той пирамиды, из которых получены соответственно усеченные конус и пирамида.

Полной поверхностью усеченного конуса называется объединение боковой поверхности этого конуса и двух его оснований. Иногда полную поверхность усеченного конуса называют его поверхностью, а ее площадь — *площадью поверхности усеченного конуса*. Эта площадь равна сумме площадей боковой поверхности и оснований усеченного конуса.

Усеченный конус может быть образован также вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны трапеции, перпендикулярной ее основанию.

На рисунке 185 изображен усеченный конус, образованный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны

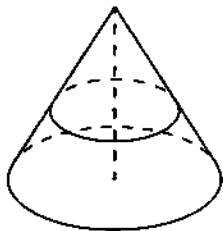


Рис. 183

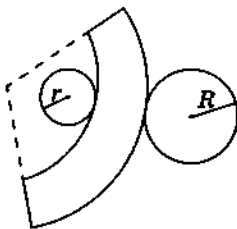


Рис. 184

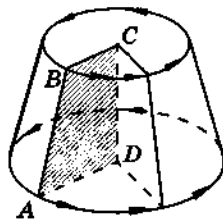


Рис. 185

CD. При этом боковая поверхность усеченного конуса образована вращением боковой стороны *AB*, а основания его — вращением оснований *AD* и *BC* трапеции.

18.9. Поверхность усеченного конуса

Выразим площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности усеченного конуса через длину l его образующей и радиусы R и r оснований ($R > r$).

Пусть P — вершина конуса, из которого получен усеченный конус; O, O_1 — центры оснований усеченного конуса; $AA_1 = l$ — одна из образующих усеченного конуса (рис. 186).

Используя формулу (2) п. 18.5, получаем

$$S_{\text{бок}} = \pi R \cdot PA - \pi r \cdot PA_1 = \pi R(PA_1 + A_1A) - \pi r \cdot PA_1 = \pi R \cdot A_1A + \pi(R - r) \cdot PA_1.$$

Учитывая, что $A_1A = l$, имеем

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl + \pi(R - r)PA_1. \quad (7)$$

Выразим PA_1 через l, R и r . Так как $O_1A_1 \parallel OA$ и OO_1 — высота усеченного конуса, то прямоугольные треугольники POA и PO_1A_1 подобны. Поэтому $AO : A_1O_1 = PA : PA_1$ или $R : r = (PA_1 + A_1A) : PA_1$, откуда

$$R \cdot PA_1 = r(PA_1 + l) \Rightarrow (R - r)PA_1 = rl \Rightarrow PA_1 = \frac{rl}{R - r}.$$

Подставив это значение PA_1 в (7), получаем

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l. \quad (8)$$

Таким образом, доказана

Теорема 28. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

Площадь полной поверхности усеченного конуса находится по формуле:

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot (R + r) \cdot l + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2.$$

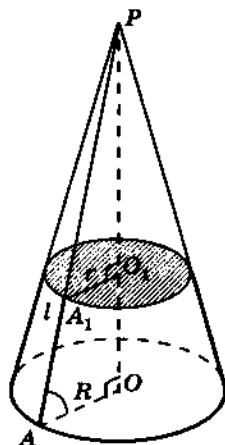


Рис. 186

Следствие. Пусть усеченный конус образован вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг ее высоты AD (рис. 187). Тогда $S_{\text{бок}} = \pi(AB + DC) \cdot BC$. Если KE — средняя линия трапеции, то $AB + DC = 2KE$, поэтому

$$S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot KE \cdot BC. \quad (9)$$

Проведем $EF \perp BC$. Из подобия прямоугольных треугольников BCH и EFK имеем

$$BC : EF = BH : KE \Rightarrow KE \cdot BC = EF \cdot BH. \quad (10)$$

Тогда равенство (9) принимает вид

$$S_{\text{бок}} = (2\pi \cdot EF) \cdot BH, \quad (11)$$

т. е. боковая поверхность усеченного конуса равна произведению его высоты на длину окружности, радиус которой равен срединному перпендикуляру, проведенному из точки оси конуса к его образующей.

18.10. Объем конуса и усеченного конуса

Найдем объем конуса, высота которого h и радиус основания R . Для этого расположим этот конус и правильную четырехугольную пирамиду, высота которой h и сторона основания R , так, чтобы их основания находились на одной и той же плоскости α , а вершины — также в одной и той же плоскости β , параллельной плоскости α и удаленной от нее на расстояние h (рис. 188).

Каждая плоскость, параллельная данным плоскостям и пересекающая конус, пересекает также пирамиду; причем площади сечений, образованных при пересечении обоих тел, относятся к площадям оснований этих тел, как квадраты их расстояний от вершин. А так как секущие плоскости для пирамиды и для конуса равноудалены от их вершин, то

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{сеч.кон}}}{S_{\text{осн.кон}}} &= \frac{S_{\text{сеч.пир}}}{S_{\text{осн.пир}}}. \text{ Тогда } \frac{S_{\text{сеч.кон}}}{S_{\text{сеч.пир}}} = \frac{S_{\text{осн.кон}}}{S_{\text{осн.пир}}} = \\ &= \frac{\pi \cdot R^2}{R^2} = \pi, \text{ значит, для объемов этих} \\ \text{тел выполняется: } V_{\text{кон}} : V_{\text{пир}} &= \pi : 1 \text{ или} \\ V_{\text{кон}} : \frac{1}{3} R^2 \cdot h &= \pi : 1, \text{ откуда} \end{aligned}$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h.$$

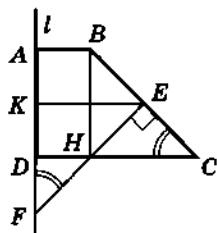


Рис. 187

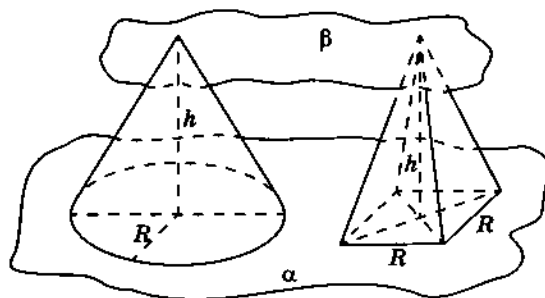


Рис. 188

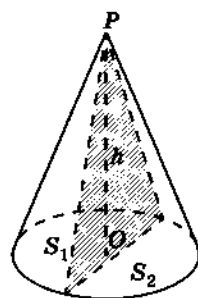


Рис. 189

Самостоятельно рассмотрите усеченные конус и пирамиду, расположенные в соответствии с условиями принципа Кавальери. Тогда вы получите формулу вычисления объема усеченного конуса:

$$V_{\text{ус.кон}} = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r \cdot R + r^2).$$

Эту же формулу вы можете вывести, если используете идею подобия так же, как это сделано в случае с выводом формулы площади боковой поверхности усеченного конуса.

Используя принцип Кавальери, докажите, что объем каждого из тел, на которые конус разбивается его сечением плоскостью, проходящей через вершину (рис. 189), может быть вычислен по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{сегм}}$, где h — высота конуса, а $S_{\text{сегм}}$ — площадь соответствующего сегмента основания конуса.

§ 19. Шар и сфера

19.1. Определение шара, сферы и их элементов

С шаром и сферой мы уже знакомы. Напомним их определения.

Определение. Шар называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем данного R ($R > 0$). Данная точка называется центром шара, а данное расстояние R — радиусом шара.

Определение. Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, равном данному R . Данная точка и расстояние R называются соответственно центром и радиусом сферы.

На рисунке 190 изображен шар с центром O и радиусом $R = OA$.

Из определений шара и сферы следует, что шар с центром O и радиусом R является объединением двух множеств точек: 1) множества точек M пространства, для которых $OM < R$ (они называются *внутренними точками шара* и образуют его внутренность); 2) множества всех M , для которых $OM = R$ (эти точки являются *граничными точками шара*, а их объединение составляет границу шара, которая называется *шаровой поверхностью* и является сферой с центром O и радиусом R).

Радиусом шара называют также всякий отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром шара*. Концы любого диаметра шара называются *диаметрально противоположными точками шара*. Отрезок, соединяющий две любые точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, называют *хордой шара (сферы)*. На рисунке 190 отрезки OA, OB, ON, OS — радиусы шара; отрезки AB, NS — диаметры шара; A и B — диаметрально противоположные точки шара. Из определения диаметра шара следует, что он равен удвоенному радиусу шара.

Покажем, что шар — тело вращения. Для этого рассмотрим полукруг F с центром O и радиусом R (рис. 191, а). При

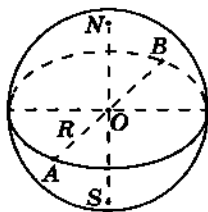


Рис. 190

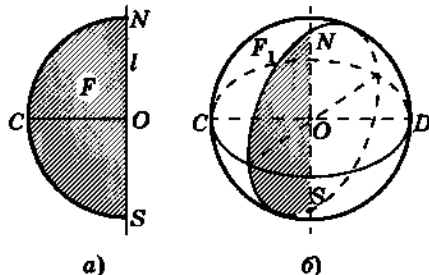


Рис. 191

вращении полукруга F вокруг прямой, содержащей его диаметр NS , образуется некоторое тело F_1 (рис. 191, б). Так как вращение вокруг прямой — движение и точка O принадлежит оси l вращения, то каждая точка тела F_1 удалена от точки O на расстояние, не большее R (движение сохраняет расстояния между точками). Это означает, что тело F_1 есть шар с центром O и радиусом R . Кроме того, при вращении границы полукруга — полуокружности — вокруг прямой l образуется шаровая поверхность — сфера. Прямая, содержащая любой диаметр шара, может быть рассмотрена как ось вращения. Следовательно, сечением шара плоскостью, перпендикулярной его оси вращения l и пересекающей шар, является круг, а сечением сферы такой плоскостью — окружность этого круга; центр круга (окружности) есть точка пересечения секущей плоскости с осью l .

Плоскость, проходящая через центр шара (сферы), называется **диаметральной плоскостью шара (сферы)**. Сечением шара диаметральной плоскостью является круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется **большим кругом**, а его окружность — **большой окружностью**; большая окружность является пересечением сферы и ее диаметральной плоскости.

19.2. Изображение сферы

Рассмотрим сферу, диаметр NS которой проведен вертикально (рис. 192, а). Большая окружность, по которой сферу пересекает диаметральная плоскость, перпендикулярная диаметру (оси) NS , называется **экватором**, а точки N и S — **полюсами сферы**. Окружность, ограничивающая круг — изображение сферы, — называется **абрисом** или **очерковой линией**.

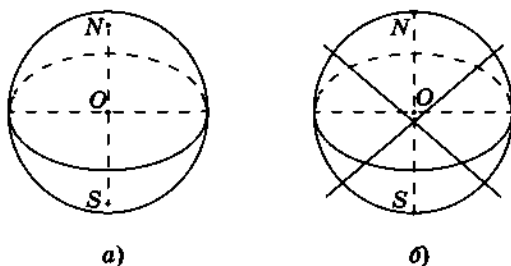


Рис. 192

Типичная ошибка (!) при изображении сферы (рис. 192, б) в том, что, изображая ее экватор эллипсом, полюсы изображают расположенными на абрисе.

Для верного и наглядного изображения сферы вспомним, как в курсе черчения изображают фигуру на комплексном двухкартинном чертеже (эпюре) посредством ортогонального ее проектирования на две взаимно перпендикулярные плоскости, одну из которых называют **фронтальной** (обозначают V), а другую — **профильной** (обозначают W) плоскостями проекций.

Сферу расположим так, чтобы ее ось $N'S'$ была параллельна профильной (W), но не параллельна фронтальной (V) плоскостям проекций. Тогда ортогональные проекции сферы на плоскости V и W имеют вид, изображенный на рисунке 193. На нем: равные круги — проекции сферы на плоскости V и W ; отрезки A_1B_1 и N_1S_1 — профильные проекции соответственно экватора и оси сферы; точки N, S — фронтальные проекции полюсов (строятся с помощью линий связи); A, B — фронтальные проекции концов диаметра экватора, параллельного фронтальной плоскости (строятся с помощью линий связи); CD — фронтальная проекция диаметра $C'D'$ сферы, перпендикулярного профильной плоскости; эллипс с осями AB и CD — фронтальная проекция экватора. При таком расположении относительно плоскостей проекций сфера изображается так, как показано на рисунках 192, а; 193, а.

! Обратите внимание: полюсы N и S не лежат на абрисе, и экватор изображается эллипсом. При этом положение полюсов N и S и положение вершин A и B эллипса-экватора взаимосвязаны.

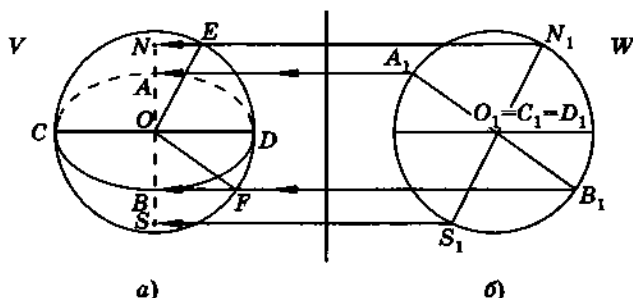


Рис. 193

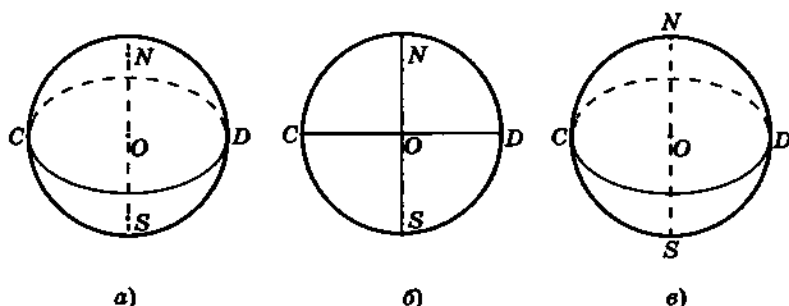


Рис. 194

Действительно, из равенства $\triangle OBF = \triangle ENO$ (см. рис. 193, а) следует: $OB = EN$, $BF = NO$. Это означает: а) если изображены полюсы N и S сферы, то вершины A и B эллипса — изображения экватора определяются из равенств $OB = OA = NE$, где $NE \parallel OD$; б) если изображен экватор (т. е. дана малая ось AB эллипса-экватора), то положение полюсов N и S определяется из равенств $ON = OS = BF$, где $BF \parallel OD$.

На рисунке 194, а — верное и наглядное изображение сферы, на рисунке 194, б — изображение сферы верное (почему?), но не наглядное; на рисунке 194, в — неверное изображение (почему?).

■ ЗАДАЧА (3.106). Найдите в пространстве множество вершин всех прямых углов, опирающихся на данный отрезок AB .

Решение. Если $\angle AMB = 90^\circ$, то точка M принадлежит окружности с диаметром AB (рис. 195, а).

Проведем произвольную плоскость α , содержащую отрезок AB . В этой плоскости множество всех точек M , из которых от-

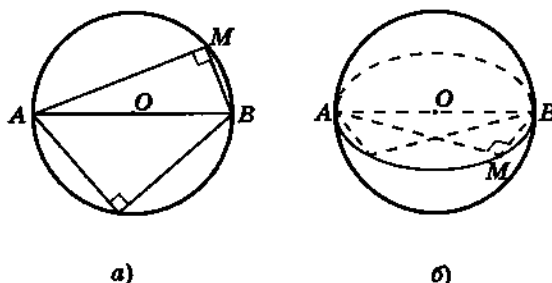


Рис. 195

резок AB виден под прямым углом, есть окружность, для которой отрезок AB — диаметр. При вращении плоскости α вокруг прямой AB окружность с диаметром AB будет также вращаться вокруг своего диаметра, в результате чего образуется сфера (рис. 195, б), диаметром которой является отрезок AB . Таким образом, искомое множество вершин прямых углов, опирающихся на отрезок AB , есть сфера с диаметром AB . Точки A и B сфере не принадлежат. (Почему?)

19.3. Уравнение сферы

Составим уравнение сферы с центром $A(a; b; c)$ и радиусом R в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Пусть $M(x; y; z)$ — любая точка этой сферы (рис. 196). Тогда $MA = R$ или $MA^2 = R^2$. Учитывая, что $MA^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$, получаем искомое уравнение сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Если начало системы координат совпадает с центром A сферы, то $a = b = c = 0$, а сфера в такой системе координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Из полученных уравнений следует, что сфера — поверхность второго порядка.

Так как для любой точки $M(x; y; z)$ шара с центром $A(a; b; c)$ и радиусом R выполняется $MA \leq R$, то этот шар может быть задан неравенством

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2.$$

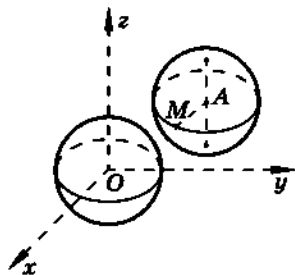


Рис. 196

При этом для всех внутренних точек M шара выполняется условие $MA^2 < R^2$, т. е. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < R^2$, для точек M шаровой поверхности — условие

$$MA = R,$$

$$\text{т. е. } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

для точек M вне шара — условие

$$MA > R,$$

$$\text{т. е. } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 > R^2.$$

19.4. Пересечение шара и сферы с плоскостью

Рассмотрим подробнее вопрос о пересечении шара и сферы с плоскостью. Имеет место

Теорема 29 (о пересечении шара и сферы с плоскостью).

1) Если расстояние от центра шара до данной плоскости меньше радиуса шара, то пересечением шара с плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара на плоскость, или сам центр шара, если плоскость проходит через этот центр. Пересечением сферы с плоскостью является окружность указанного круга. Радиус r сечения в этом случае равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, а d — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2) Если расстояние от центра шара до данной плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку.

3) Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса, то плоскость не имеет с шаром общих точек.

Доказательство. Пусть O — центр шара, R — его радиус; α — данная плоскость, точка A — основание перпендикуляра, проведенного из центра O на плоскость α . Обозначим $\rho(O; \alpha) = |OA| = d$ — расстояние от центра шара до плоскости α .

Рассмотрим каждый из случаев взаимного расположения шара и данной плоскости α .

1) $\rho(O; \alpha) = d < R$ и плоскость α не проходит через центр O шара (рис. 197). Докажем, что пересечение шара и плоскости есть круг с центром A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Для этого достаточно убедиться, что любая точка пересечения шара и плоскости α есть точка круга с центром A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ и, наоборот, любая точка этого круга есть точка указанного пересечения.

Действительно, пусть M — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α (рис. 197). В прямоугольном треугольнике AOM по теореме Пифагора $OM^2 = OA^2 + AM^2$, отку-

да $AM = \sqrt{OM^2 - OA^2}$. Так как точка M принадлежит шару, то $OM \leq R$, тогда $OM^2 - OA^2 \leq R^2 - d^2$, поэтому $AM \leq \sqrt{R^2 - d^2}$. Это означает, что точка M сечения шара плоскостью α находится от точки A на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - d^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром A и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Обратно, пусть M — произвольная точка плоскости α , принадлежащая кругу с центром A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. В прямоугольном треугольнике AOM по теореме Пифагора $OM^2 = OA^2 + AM^2$. Так как $AM \leq r$, то $OM^2 \leq OA^2 + r^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2$, откуда $OM \leq R$. Значит, точка M принадлежит данному шару. Учитывая, что точка M принадлежит и плоскости α , приходим к выводу: точка M принадлежит пересечению данного шара и плоскости α .

Если неравенства, которые использовались в предыдущем доказательстве, заменить равенствами, то, рассуждая аналогично, можно доказать, что при $d < R$ пересечением сферы и плоскости является окружность с центром A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Прodelайте это самостоятельно.

Если плоскость α проходит через центр O шара, то $d = 0$, значит, $r = R$, т. е. сечением шара такой плоскостью является большой круг, а сечением сферы — большая окружность (рис. 197).

2) $\rho(O; \alpha) = d = OA = R$ (рис. 198).

Так как $OA = \rho(O; \alpha) = R$, то точка A , являющаяся основанием перпендикуляра из центра O шара на плоскость α , принадлежит шаровой поверхности, ограничивающей данный шар.

Пусть M — произвольная точка плоскости α , отличная от точки A (рис. 198). Тогда длины наклонной OM и перпендику-

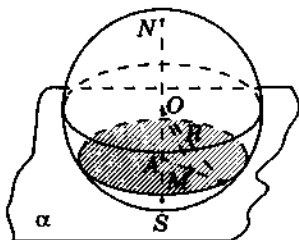


Рис. 197

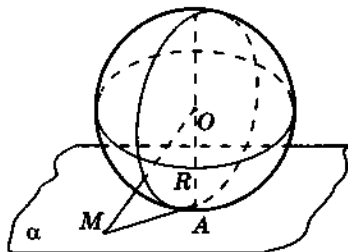


Рис. 198

ляра OA , проведенных из точки O к плоскости α , удовлетворяют неравенству $OM > OA = R$. Значит, точка M не принадлежит шару. Следовательно, плоскость α имеет только одну общую точку с шаром — точку A .

3) $\rho(O; \alpha) = OA = d > R$ (рис. 199). Для любой точки M плоскости α выполняется (почему?) $OM \geq d > R$. Это означает, что на плоскости α нет точек шара. Теорема доказана. ▽

■ ЗАДАЧА (3.161). Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Радиус шара равен R . Найдите: а) площадь получившегося сечения; б) площади боковой и полной поверхностей конуса, основанием которого служит получившееся сечение шара, а вершиной — центр шара; в) площади боковой и полной поверхностей правильной треугольной пирамиды, вписанной в этот конус.

Решение. а) Пусть O — центр шара, OD — его радиус, C — середина радиуса OD ; α — секущая плоскость, проходящая через точку C перпендикулярно OD .

Рассмотрим сечение шара диаметральной плоскостью, проходящей через его радиус OD . Этим сечением является большой круг с центром O и радиусом R (рис. 200); AB — диаметр круга — сечения данного шара плоскостью α .

Так как $AB \perp OD$ и точка C — середина радиуса OD , то отрезок AB равен стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R , значит, $AB = R\sqrt{3}$, откуда $AC = r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, где r — радиус сечения шара плоскостью α . Тогда площадь этого сечения равна $\pi r^2 = \frac{3\pi R^2}{4}$.

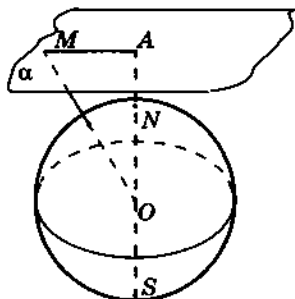


Рис. 199

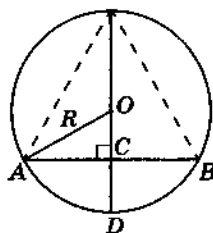


Рис. 200

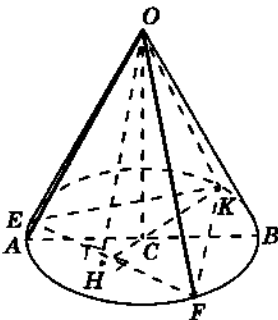


Рис. 201

б) Найдем площадь поверхности конуса с вершиной O и радиусом основания $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Образующая OE конуса (рис. 201) равна радиусу R данного шара. Поэтому площадь боковой поверхности этого конуса равна $\pi r \cdot R = \pi \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R = \frac{\sqrt{3}\pi R^2}{2}$, а площадь его полной поверхности — $\frac{\sqrt{3}\pi R^2}{2} + \frac{3\pi R^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi R^2 \cdot (2 + \sqrt{3})$.

в) Найдем площадь поверхности правильной треугольной пирамиды $OEFK$, вписанной в конус, радиус основания которого $CK = r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, боковое ребро OE пирамиды равно радиусу R данного шара (рис. 201).

Так как $\triangle EFK$ — правильный, вписанный в окружность радиуса $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, то сторона этого треугольника равна $r\sqrt{3}$, т. е. $EF = \frac{3R}{2}$. Тогда $S_{\triangle EFK} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}R^2}{16}$.

Площадь боковой поверхности пирамиды равна $3S_{\triangle EOF} = \frac{3}{2} EF \cdot OH$, где OH — апофема пирамиды. В прямоугольном треугольнике OHF находим

$$OH = \sqrt{OF^2 - HF^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9}{16}R^2} = \frac{\sqrt{7}R}{4}.$$

Тогда $\frac{3}{2} EF \cdot OH = \frac{9\sqrt{7}R^2}{16}$ — площадь боковой поверхности пирамиды.

Следовательно, площадь полной поверхности пирамиды равна

$$\frac{9\sqrt{3}R^2}{16} + \frac{9\sqrt{7}R^2}{16} = \frac{9}{16} R^2 (\sqrt{3} + \sqrt{7}).$$

Ответ: а) $\frac{3\pi R^2}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4} \pi R^2 (2 + \sqrt{3})$; в) $\frac{9\sqrt{7}R^2}{16}$; $\frac{9}{16} R^2 (\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

19.5. Плоскость, касательная к сфере и шару

Из теоремы 29 следует, что плоскость может иметь со сферой (с шаром) только одну общую точку.

Определение. Плоскость, имеющая только одну общую точку со сферой (с шаром), называется касательной плоскостью к сфере (шару), а их единственная общая точка называется точкой касания (рис. 202).

Также говорят, что плоскость касается сферы (шара).

Любая прямая, лежащая в касательной плоскости к сфере и проходящая через точку их касания, называется *касательной прямой к сфере*; эта прямая имеет со сферой единственную общую точку — точку касания, и радиус сферы, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной прямой.

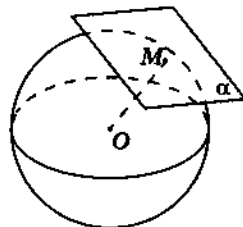


Рис. 202

 Заметим, что если прямая a касается сферы в точке M , то эта прямая касается в точке M той окружности большого круга, которая является сечением сферы и диаметральной плоскости, проходящей через прямую a .

Справедливо и обратное: если прямая a касается окружности большого круга сферы в точке M , то эта прямая касается в точке M самой сферы.

Более того, так как прямая a , касающаяся сферы в точке M , имеет со сферой лишь одну общую точку — точку M , то эта прямая касается любой окружности, по которой пересекаются данная сфера и любая (не только диаметральная) плоскость, проходящая через прямую a . А поскольку радиус, проведенный в точку касания прямой и окружности, перпендикулярен касательной прямой, то центры всех этих окружностей — полученных сечений сферы — лежат в плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно касательной прямой a . При этом, если точка O — центр данной сферы радиуса R , точка A — центр окружности радиуса r , по которой пересекает сферу одна (любая) из плоскостей, проходящих через касательную в точке M прямую к данной сфере, φ — величина угла между этой секущей плоскостью и проходящей через точку M

диаметральной плоскостью данной сферы, то справедливо равенство $r = R \cdot \cos \varphi$ ($\triangle OAM$ — прямоугольный, так как отрезок OA перпендикулярен секущей плоскости. (Почему?)). 

Для плоскости, касательной к сфере, справедливы теоремы, аналогичные теоремам о прямой, касательной к окружности на плоскости.

Теорема 30. Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство. Пусть дана сфера с центром O и радиусом R . Рассмотрим плоскость α , касающуюся данной сферы в точке A (см. рис. 202) и докажем, что $OA \perp \alpha$.

Предположим, что радиус OA — не перпендикуляр, а наклонная к плоскости α . Значит, расстояние от центра сферы до плоскости α , равное длине перпендикуляра, проведенного из центра O на плоскость α , меньше радиуса. Тогда по теореме 29 плоскость α пересекает сферу по окружности. Но по условию теоремы плоскость α касается сферы и имеет с ней единственную общую точку A . Пришли к противоречию, которое и доказывает, что $OA \perp \alpha$. Теорема доказана. ▼

Справедлива обратная

Теорема 31. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через точку A сферы и перпендикулярна радиусу OA (см. рис. 202). Значит, расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу OA . Тогда по теореме 29 плоскость α и сфера имеют единственную общую точку A , следовательно, плоскость α касается сферы (в точке A). Теорема доказана. ▼

Так как сечение шара плоскостью есть круг, то можно доказать, что для шара выполняются следующие метрические соотношения:

- диаметр шара, делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;
- отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой

- (они образуют поверхность конуса с вершиной в данной точке, а точки касания этих прямых — окружность основания этого конуса);
- произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная $R^2 - a^2$, где R — радиус шара, a — расстояние от центра шара до данной точки);
 - если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка ее внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно $a^2 - R^2$, где R — радиус шара, a — расстояние от центра шара до данной точки).

19.6. Вписанные и описанные шары и сферы

Определение. Шар называется вписанным в цилиндр, если основания и каждая образующая цилиндра касаются шара (рис. 203).

Цилиндр в таком случае называется *описанным около шара*. В цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда он равносторонний.

Определение. Шар называется описанным около цилиндра, если основания цилиндра служат сечениями шара (рис. 204).

Цилиндр при этом называют *вписанным в шар*. Около любого цилиндра можно описать шар. Центром шара служит се-

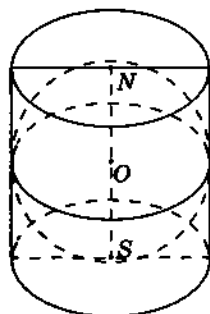


Рис. 203

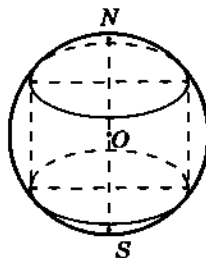


Рис. 204

редина оси цилиндра, а радиус шара равен радиусу круга, описанного около осевого сечения цилиндра.

Определение. Шар называется описанным около конуса, если основание конуса — сечение шара, а вершина конуса принадлежит поверхности шара (рис. 205).

Конус при этом называют описанным в шар.

Центр шара, описанного около конуса, совпадает с центром круга, описанного около осевого сечения конуса, а радиус шара равен радиусу этого круга.

Определение. Шар называется вписанным в конус, если основание и все образующие конуса касаются шара.

Конус при этом называют описанным около шара (рис. 206). Центр вписанного в конус шара совпадает с центром круга, вписанного в осевое сечение конуса, а радиус шара равен радиусу этого круга.

Определение. Шар называется вписанным в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

Многогранник в таком случае называют описанным около шара (рис. 207).

Не во всякий многогранник можно вписать шар. Например, вписать шар можно в любую треугольную или правильную пирамиду. А в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольник, не являющийся квадратом, шар вписать нельзя.

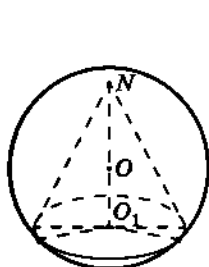


Рис. 205

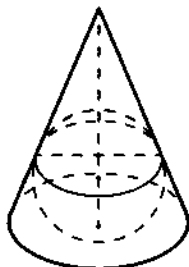


Рис. 206

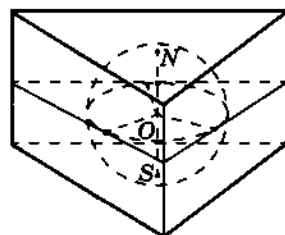


Рис. 207

При нахождении радиуса r вписанного в многогранник шара (если таковой существует) удобно пользоваться соотношением

$$V_{\text{многогр}} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot S_{\text{полн.поверх.}}$$

Шар называется вписанным в двугранный угол, если он касается его граней. Центр вписанного в двугранный угол шара лежит на биссекторной плоскости этого двугранного угла. При этом для радиуса r шара, вписанного в двугранный угол, величины α этого угла и расстояния m от центра шара до ребра двугранного угла справедлива формула: $r = m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Этой формулой часто пользуются при решении задач.

Шар называется вписанным в многогранный угол, если он касается всех граней многогранного угла. При решении задач, в которых рассматриваются вписанные в многогранный угол шары, удобно пользоваться соотношением: $r = m \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, где r — радиус шара, вписанного в многогранный угол, m — расстояние от центра шара до ребра многогранного угла, α — величина двугранного угла при этом ребре.

Если все плоские углы 3-гранного угла равны по 60° , то расстояние от вершины угла до центра вписанного в этот угол шара радиусом r равно $3r$; если все плоские углы 3-гранного угла прямые, то расстояние от вершины угла до центра вписанного в этот угол шара радиусом r равно $r\sqrt{3}$. Эти соотношения часто используют при решении задач, в которых рассматриваются те или иные комбинации шаров с правильными тетраэдрами или прямоугольными параллелепипедами.

Определение. Шар называется описанным около многогранника, если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара (рис. 208). Многогранник при этом называют вписанным в шар.

Не около всякого многогранника можно описать шар. Например, около любой правильной или любой треугольной пирамиды шар описать можно, а около четырехугольной пирамиды, в основании которой лежит ромб, не являющийся квадратом, шар опи-

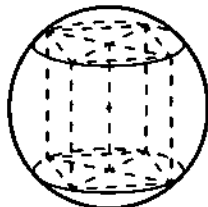


Рис. 208

сать нельзя (около ромба нельзя описать окружность). Более того, нельзя описать шар около любой наклонной призмы.

Вообще, для того чтобы около многогранника можно было описать шар, необходимо, чтобы около любой его грани можно было описать круг. При этом центр описанного шара может лежать как внутри многогранника, так и вне его или на его поверхности (даже на ребре многогранника), и проектируется в центр описанного около любой грани круга. Кроме того, перпендикуляр, опущенный из центра описанного около многогранника шара на ребро многогранника, делит это ребро (как хорду шара) пополам.

Мы уже говорили о пирамидах, все ребра которых одинаково наклонены к основанию. Около таких пирамид всегда можно описать шар, центр которого лежит на луче, содержащем высоту пирамиды.

Высота h пирамиды, радиус R_k описанного около основания пирамиды круга и радиус R описанного около этой пирамиды шара связаны соотношением:

$$(R - h)^2 + R_k^2 = R^2.$$

Приведем формулы для вычисления радиусов вписанных и описанных шаров для правильных многогранников с ребром a .

Вид многогранника	Радиус вписанного шара	Радиус описанного шара
Правильный тетраэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$
Правильный октаэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
Правильный гексаэдр (куб)	$0,5a$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Правильный икосаэдр	$\frac{a(3 + \sqrt{5})}{4\sqrt{3}}$	$\frac{a\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}$
Правильный додекаэдр	$\frac{a\sqrt{10\sqrt{5} + 22}}{4\sqrt{5}}$	$\frac{a(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$

В задачах иногда еще рассматривают шары, касающиеся всех ребер данного многогранника. Для куба, например, такой шар существует и его радиус равен $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — ребро куба.

19.7. Площади поверхностей шара и его частей

Часть шара, заключенная между секущей плоскостью и одной из двух частей его сферической поверхности, называется **шаровым сегментом** (рис. 209 и 211). Поверхность шарового сегмента называется **сегментной поверхностью**: она представляет собой часть шаровой поверхности, отсекаемую какой-нибудь плоскостью. Круг AB , по которому плоскость пересекает шар, называется **основанием шарового сегмента**, а окружность этого круга — **основанием сегментной поверхности**. Отрезок OC радиуса, перпендикулярного секущей плоскости, называется **высотой шарового сегмента (сегментной поверхности)**.

Часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется **шаровым слоем** (см. рис. 209, 211). Поверхность шарового слоя называется **шаровым поясом**. Шаровой пояс — часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями. Перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к плоскости другого, называется **высотой шарового слоя (шарового пояса)**.

Сегментную поверхность и шаровой пояс можно рассматривать как поверхности вращения: в то время, как при вращении полуокружности CAA_1D (см. рис. 209) вокруг диаметра CD образуется шаровая поверхность (сфера), при вращении дуги CA этой полуокружности вокруг того же диаметра образуется сегментная поверхность, а при вращении дуги AA_1 — шаровой пояс.

Тело, образованное при вращении кругового сектора с углом φ ($\varphi < 180^\circ$) вокруг прямой, которая содержит диаметр круга, не имеющий с круговым сектором общих внутренних точек, называется **шаровым сектором**.

Из этого определения следует, что поверхность шарового сектора состоит из сегментной поверхности и боковой поверхности ко-

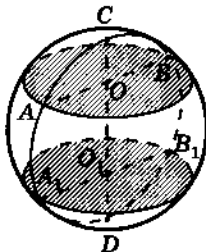


Рис. 209

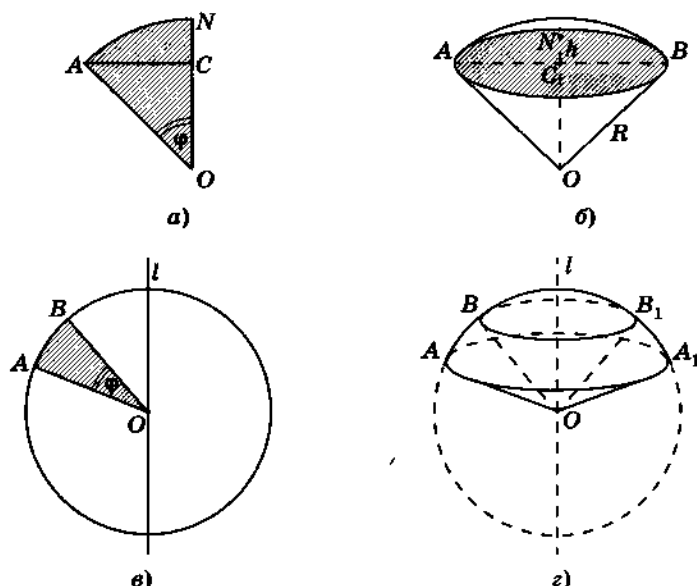


Рис. 210

нуса (рис. 210, а, б) или из поверхности шарового пояса и боковых поверхностей двух конусов (рис. 210, в, г).

На рисунке 211 изображены различные элементы шара и сферы (шаровой сектор имеет простейший вид).

Рассмотрим вопрос о вычислении площадей сферы, сегментной поверхности, шарового пояса и шарового сектора.

а) **Площадь сферы.** Пусть $ABCDEF$ — правильная ломаная линия, вписанная в данную полуокружность; a — длина ее апофемы (рис. 212). При вращении полуокружности вокруг ее диаметра AF образуется сфера, а при вращении ломаной $ABCDEF$ вокруг этого же диаметра AF образуется некоторая поверхность Φ .

За площадь сферы, образованной вращением полуокружности вокруг ее диаметра, принимают предел, к которому стремится площадь поверхности Φ , образованной вращением вокруг того же диаметра правильной n -звенной ломаной линии, вписанной в полуокружность, при $n \rightarrow +\infty$ (число сторон неограниченно возрастает).

Поверхность Φ является объединением поверхностей, образованных вращением звеньев ломаной линии, вписанной в по-



Рис. 211

луокружность, вокруг ее диаметра. Этими поверхностями являются боковые поверхности либо конуса (для первого и последнего звеньев ломаной), либо цилиндра (для звеньев, параллельных оси вращения; их может и не быть), либо усеченного конуса (для всех остальных звеньев ломаной).

При вычислении площадей получившихся поверхностей воспользуемся следствиями из теорем 25, 26, 28. Площадь S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) поверхности, образованной вращением любого звена, равна произведению 2π , расстояния b_i от середины звена до центра сферы и длины m_i проекции этого звена на ось вращения, т. е. $S_{i \text{ вращ}} = 2\pi \cdot b_i \cdot m_i$.

Так как ломаная — правильная, то все b_i равны апофеме a_n данной n -звенной ломаной, а $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = 2R$ и

$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = 4\pi \cdot a_n \cdot R$. Причем $a_n = \sqrt{R^2 - \left(\frac{P_n}{2n}\right)^2}$, где

P_n — периметр данной ломаной. Поскольку ог-

раниченная переменная величина $\frac{P_n}{2n}$ при $n \rightarrow +\infty$ становится бесконечно малой, то при $n \rightarrow +\infty$ апофема a_n стремится к радиусу R полуокружности. Следовательно, предел площади поверхности Φ при $n \rightarrow +\infty$ равен $4\pi R \cdot R = 4\pi R^2$. Этот предел и принимается за величину площади сферы радиуса R :

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$

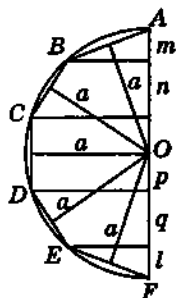


Рис. 212

б) Площади сегментной поверхности и шарового пояса. Если правильная ломаная вписана не в полуокружность, а в некоторую ее часть, например в дугу AD (см. рис. 212), при вращении которой образуется сегментная поверхность, то рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к выводу:

$$S_{\text{сегм.поверх}} = 2\pi R h,$$

где h — высота сферического сегмента.

Если же ломаная вписана в дугу BE (рис. 212), при вращении которой образуется шаровой пояс, то получим:

$$S_{\text{шар.пояса}} = 2\pi R h,$$

где h — высота шарового пояса.

Прodelайте эти рассуждения самостоятельно.

в) Площадь поверхности шарового сектора может быть получена как сумма площадей поверхности сферического сегмента и боковой поверхности одного конуса (см. рис. 210, а, б) или как сумма площадей поверхности сферического слоя и боковых поверхностей двух конусов (см. рис. 210, в, г). Рассмотрим частный случай (см. рис. 210, а, б). Если R — радиус сферы, h — высота шарового сегмента, то площадь боковой поверхности конуса с вершиной в центре сферы, образующей R и радиусом основания $\sqrt{2Rh - h^2}$ (докажите это) равна $\pi R \sqrt{2Rh - h^2}$, а площадь сегментной поверхности равна $2\pi R h$. Значит, для площади шарового сектора справедлива формула

$$S_{\text{шар. сект}} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2}).$$

■ ЗАДАЧА (3.418). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которого равна 4. Известно также, что $AS = BS = \sqrt{19}$, а $SC = 3$. Найдите площадь сферы, описанной около этой пирамиды.

Решение. Решим эту задачу двумя методами.

Первый метод (геометрический). Пусть O — центр сферы, описанной около данной пирамиды; D — точка пересечения медиан правильного $\triangle ABC$; E — середина отрезка AB (рис. 213).

Центр O сферы равноудален от всех вершин $\triangle ABC$, поэтому принадлежит прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC .

Так как точка E — середина отрезка AB , то $SE \perp AB$ ($AS = BS$) и $CE \perp AB$ ($\triangle ABC$ — правильный). Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AB \perp (CSE)$, поэтому $(CSE) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей). Это означает, что прямая OD , а следовательно, и точка O — центр сферы — лежат в плоскости CSE .

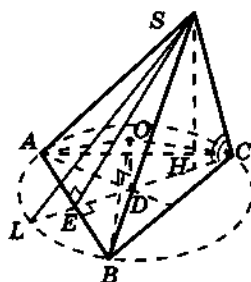


Рис. 213

Точка D является центром окружности, описанной около $\triangle ABC$. (По этой окружности плоскость ABC пересекает сферу, описанную около данной пирамиды.) Если L — точка пересечения прямой CE и упомянутой окружности, то CL — ее диаметр. Найдём CL .

В правильном $\triangle ABC$ имеем: $CE = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$; $CD = \frac{2}{3}CE = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Тогда $CL = 2CD = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Далее

$\triangle BSE$ ($\angle BES = 90^\circ$): $SE^2 = SB^2 - BE^2 = 19 - 4 = 15$ (по теореме Пифагора);

$\triangle SEC$ (по теореме косинусов):

$$\cos C = \frac{SC^2 + EC^2 - SE^2}{2SC \cdot EC} = \frac{9 + 12 - 15}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$\triangle SLC$ (по теореме косинусов):

$$SL^2 = SC^2 + CL^2 - 2SC \cdot CL \cdot \cos C = \frac{67}{3} \Rightarrow SL = \sqrt{\frac{67}{3}}.$$

Плоскость CSL проходит через центр O сферы, следовательно, пересекает сферу по большой окружности, которая описана около $\triangle CSL$. Значит, радиус R этой окружности равен радиусу сферы, описанной около данной пирамиды. Найдём R .

В треугольнике CSL имеем $\frac{SL}{\sin C} = 2R$. Так как в этом тре-

угольнике $\cos C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, то $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$. Тогда

$$R = \frac{SL}{2\sin C} = \sqrt{\frac{67}{3}} : \sqrt{\frac{11}{3}} = \sqrt{\frac{67}{11}}.$$

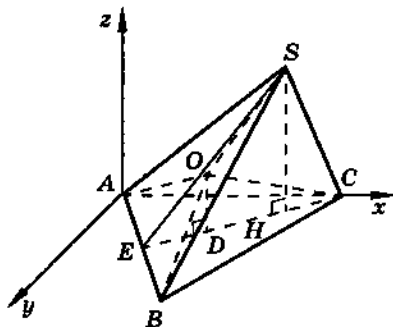


Рис. 214

Находим площадь Q сферы:

$$Q = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{67}{11} = \frac{268}{11}\pi.$$

Второй метод (координатный). Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с вершиной A данной пирамиды, направление оси абсцисс — с направлением луча AC , ось аппликат была перпендику-

лярна плоскости основания ABC пирамиды (рис. 214).

В этой системе координат вершины основания пирамиды имеют координаты: $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2\sqrt{3}; 0)$, $C(4; 0; 0)$.

Обозначив через x, y, z координаты вершины S пирамиды, найдем их из условий: $AS = BS = \sqrt{19}$, $CS = 3$.

Имеем $AS^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 19$, $BS^2 = (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2 = 19$, $CS^2 = (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 19, \\ (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 + z^2 = 19, \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 9, \end{cases}$$

находим: $x = \frac{13}{4}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $z = \frac{\sqrt{33}}{2}$.

Таким образом, вершина S имеет следующие координаты:

$$S\left(\frac{13}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{33}}{2}\right).$$

Пусть центр O сферы имеет координаты a, b, c , а ее радиус равен R . Так как сфера описана около пирамиды $SABC$, то $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OS^2 = R^2$. Это соотношение в координатном виде равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2, \\ (a-2)^2 + (b-2\sqrt{3})^2 + c^2 = R^2, \\ \left(a - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(c - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2 = R^2, \\ (a-4)^2 + b^2 + c^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения четвертое, получаем $a = 2$, после чего, вычитая из первого уравнения второе, получаем $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

После вычитания третьего уравнения системы из первого ее уравнения получаем:

$$\frac{13}{4} \left(2a - \frac{13}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2b - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\sqrt{33}}{2} \left(2c - \frac{\sqrt{33}}{2} \right) = 0.$$

Подставив в это уравнение вместо a и b найденные их значения, получаем $c = \frac{5}{\sqrt{33}}$. Отсюда: $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4 + \frac{4}{3} + \frac{25}{33} = \frac{67}{11}$.

Тогда искомая площадь Q сферы равна: $Q = 4\pi R^2 = \frac{268}{11} \pi$.

Ответ: $\frac{268}{11} \pi$ (кв. ед.).

19.8. Объем шара и его частей

Рассмотрим фигуру, образованную вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $2R$ вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе (рис. 215, а). Объем этой фигуры равен разности объема цилиндра с высотой $2R$, радиусом основания R и удвоенного объема конуса высоты R , радиусом основания R :

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3. \quad (*)$$

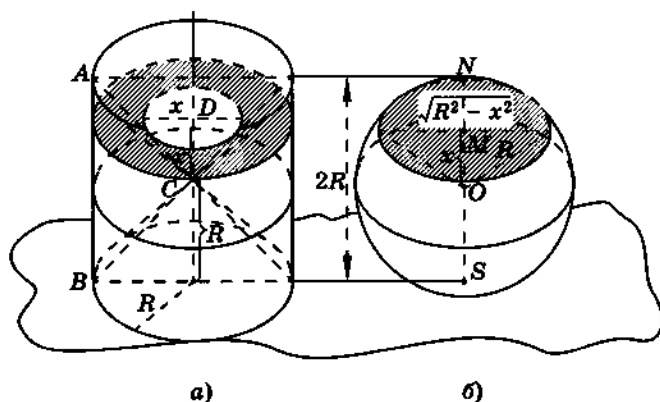


Рис. 215

Шар радиусом R (рис. 215, б) и образованную выше фигуру вращения расположим между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно $2R$. Шар при этом будет касаться каждой из данных плоскостей, а фигуру вращения расположим так, чтобы ее ось вращения была перпендикулярна этим плоскостям (см. рис. 215). (Плоскость, которая содержит верхнее основание цилиндра и касается сферы в точке N , на рисунке не изображена.)

Будем пересекать наши фигуры плоскостями, параллельными данным плоскостям и удаленными от центра шара на расстояние x ($0 \leq x \leq R$).

При $x = 0$ площади сечений обеих фигур равны $\pi \cdot R^2$; при $x = R$ площади сечений равны нулю. В остальных случаях площадь сечения шара равна $\pi \cdot (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \pi \cdot (R^2 - x^2)$, а площадь сечения другой фигуры (ею является кольцо) равна $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot x^2$. Следовательно, площади равноудаленных от центра шара сечений рассматриваемых фигур равны (относятся, как 1 : 1). Поэтому на основании принципа Кавальери равны и объемы этих тел. Тогда на основании (*):

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3,$$

где R — радиус шара.

Для получения объема шарового сегмента высоты h рассмотрим предыдущую ситуацию для $R - h \leq x \leq R$ (при $h < R$) (рис. 215, 216). Применяя принцип Кавальери, получим: объем шарового сегмента равен разности объема цилиндра высотой h и радиусом основания R и объема усеченного конуса высотой h и радиусами оснований R и $R - h$, т. е.

$$V = \pi \cdot h \cdot R^2 - \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot (R - h) + (R - h)^2) = \frac{1}{3} \pi \cdot h^2 \cdot (3R - h).$$

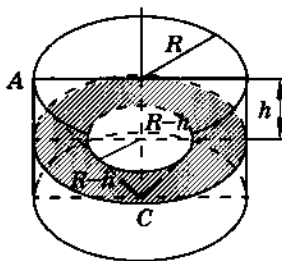


Рис. 216

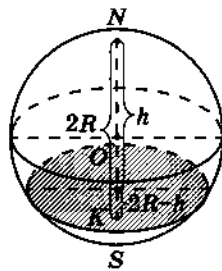
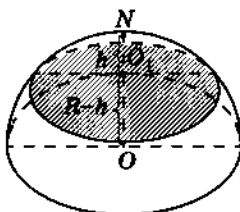


Рис. 217

При $h > R$ объем шарового сегмента можно найти как разность объема шара и объема шарового сегмента высоты $2R - h$ (рис. 217): $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot (2R - h)^2 \cdot (3R - (2R - h)) = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2(3R - h)$, т. е. получаем ту же самую формулу. Подставляя в эту формулу $h = R$, получим $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2(3R - R) = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$, что соответствует объему полушара.

Мы показали, что в шаре радиуса R объем любого шарового сегмента высоты h может быть вычислен по формуле:

$$V_{\text{шар. сегм}} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)$$

или в другом виде

$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi \cdot h^2 \cdot \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Выведем теперь формулу для вычисления объема шарового сектора.

Сначала рассмотрим шаровой сектор, состоящий из шарового сегмента высоты h и конуса высоты $(R - h)$ с вершиной в центре шара радиусом R (рис. 218). Для него имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{шар. сект}} &= V_{\text{сегм}} + V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h) + \\ &+ \frac{1}{3}\pi \cdot (R - h) \cdot R^2 - (R - h)^2 = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h. \end{aligned}$$

Докажите самостоятельно, что и для других шаровых секторов (рис. 219, 220) их объем вычисляется по формуле:

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h.$$

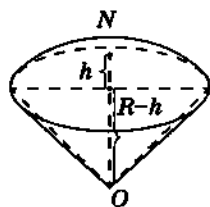


Рис. 218

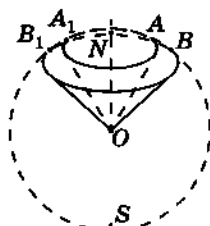


Рис. 219

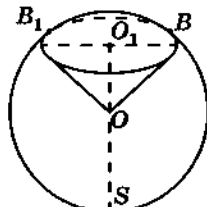


Рис. 220

Отметим, что объем шарового слоя с радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой H вычисляется по формуле

$$V = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2).$$

■ ЗАДАЧА (3.457). Четыре шара радиусом R и четыре шара радиусом r расположены так, что каждый касается трех шаров одного радиуса и трех шаров другого радиуса. Найдите отношение объема шара радиусом R к объему шара радиусом r ($R > r$).

Решение. Обозначим V_1, V_2 — объемы шаров с радиусами соответственно R и r . Тогда $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, значит, $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$.

Пусть A, B, C, P — центры шаров радиусом R ; A_1, B_1, C_1, P_1 — центры шаров радиусом r . Тогда:

1) $AB = BC = CA = AP = BP = CP = 2R \Rightarrow PABC$ — правильный тетраэдр с ребром $2R$;

2) $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = A_1P_1 = B_1P_1 = C_1P_1 = 2r \Rightarrow P_1A_1B_1C_1$ — правильный тетраэдр с ребром $2r$.

Обозначим A_2, B_2, C_2, P_2 — центры граней тетраэдра $PABC$ (рис. 221) и докажем, что все четыре высоты AA_2, BB_2, CC_2 и PP_2 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

В самом деле, если $M = AA_2 \cap PP_2$, то из подобия треугольников HAP и HP_2A_2 следует $HP : HA_2 = AP : A_2P_2 = 3:1$, тогда из подобия треугольников APM и A_2P_2M следует, что

$$AP : A_2P_2 = PM : MP_2 = AM : MA_2 = 3:1, \text{ т. е. } PM = \frac{3}{4} PP_2.$$

Аналогично доказывается, что высоты BB_2 и CC_2 делятся точкой M в отношении $BM : MB_2 = CM : MC_2 = 3:1$ и, таким образом, точки A_2, B_2, C_2, P_2 равноудалены от точки M .

Далее, так как шар с центром P_1 и радиусом r касается шаров с центрами A, B, C и радиусами R , то $P_1A = P_1B = P_1C = R + r$, т. е. точка P_1 равноудалена от вершин A, B и C правильного тетраэдра $PABC$. Так как $(R + r) < 2R$, то P_1 принадлежит высоте PP_2 этого тетраэдра: $P_1 \in PP_2$. Аналогично доказывается, что $A_1 \in AA_2, B_1 \in BB_2, C_1 \in CC_2$.

Найдем дважды длину высоты PP_2 тетраэдра $PABC$: с одной стороны, как длину катета прямоугольного треугольника APP_2 , с другой стороны, как сумму длин отрезков PM, MP_1 и PP_2 .

В правильном $\triangle ABC$ со стороной $2R$ имеем: $AP_2 = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle APP_2$: $PP_2 = \sqrt{AP^2 - AP_2^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

Найдем длину отрезка PP_2 иначе. В прямоугольном $\triangle AP_1P_2$ имеем:

$$P_1P_2 = \sqrt{AP_1^2 - AP_2^2} = \sqrt{(R+r)^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{(R+r)^2 - \frac{4}{3}R^2}.$$

Аналогично можно убедиться, что $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = P_1P_2 = \sqrt{(R+r)^2 - \frac{4}{3}R^2}$. Тогда, учитывая, что $MA_2 = MB_2 = MC_2 = MP_2$, приходим к выводу: $MA_1 = MB_1 = MC_1 = MP_1$. Это означает, что точка M — общий центр правильных тетраэдров $PABC$ и $P_1A_1B_1C_1$ и $PP_2 = PM + MP_1 + P_1P_2$.

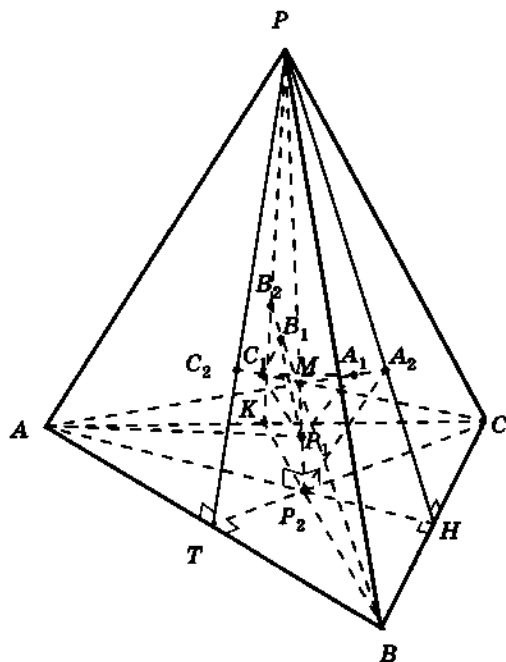


Рис. 221

Так как в правильном тетраэдре $PABC$ с ребром $2R$ для расстояния PM от вершины P до центра M этого тетраэдра выполняется $PM = \frac{3}{4} PP_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$, то в правильном тетраэдре $P_1A_1B_1C_1$ с ребром $2r$ для расстояния P_1M от вершины P_1 до его центра M выполняется $P_1M = \frac{r\sqrt{6}}{2}$.

Подставляя в равенство $PP_2 = PM + MP_1 + P_1P_2$ найденные значения длин отрезков PP_2 , PM , MP_1 и P_1P_2 , получаем:

$$\frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{R\sqrt{6}}{2} + \frac{r\sqrt{6}}{2} + \sqrt{(R+r)^2 - \frac{4}{3}R^2},$$

или после элементарных преобразований:

$$R^2 - 6Rr + r^2 = 0.$$

Разделив это уравнение на r^2 и введя новую переменную $t = \frac{R}{r}$, получаем уравнение $t^2 - 6t + 1 = 0$, корнями которого являются $t_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Так как $t_1 < 0$, то условию задачи удовлетворяет лишь значение $t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Это означает, что $\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$. Тогда $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = (3 + 2\sqrt{2})^3$.

Ответ: $(3 + 2\sqrt{2})^3$.



1. О применении определенного интеграла для нахождения объемов тел вращения

1.1. Формула объема тела вращения

В п.16.2 дано определение тела вращения.

Получим формулу для вычисления объема тела вращения, применяя интеграл, о котором вам рассказали в курсе «Алгебры и начал анализа».

Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, не принимающая отрицательных значений; A, B — точки графика этой функции (рис. 222).

Рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную дугой графика функции $y = f(x)$, отрезками aA , bB и отрезком $[a; b]$ координатной оси Ox (см. рис. 222). При вращении этой трапеции вокруг оси Ox образуется тело вращения (рис. 223), которое обозначим Φ и поставим себе задачу: найти объем этого тела.

Через произвольную точку $x = c$ ($a \leq c \leq b$) отрезка $[a; b]$ проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox . Сечением те-

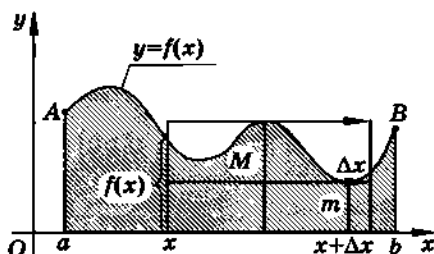


Рис. 222

ла Φ этой плоскостью является круг, радиус которого равен $f(c)$, а площадь — $\pi f^2(c)$ (или точка $(c; 0)$).

Объем части тела Φ , заключенной между этой плоскостью и плоскостью $x = a$, изменяется при изменении x . Обозначим этот переменный объем $V(x)$. Заметим, что $V(x) = V(a) = 0$ при $x = a$; при $x = b$ имеем $V(x) = V(b) = V$ — искомый объем тела вращения Φ .

Покажем, что функция $V(x)$ имеет производную $V'(x)$ и $V'(x) = \pi f^2(x)$.

Придадим абсциссе x приращение $\Delta x > 0$, тогда объем $V(x)$ получает приращение $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$. Пусть m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[x; x + \Delta x]$. Цилиндр, радиус основания которого равен m , содержится в теле вращения объема $\Delta V(x)$, а цилиндр, радиус основания которого равен M , содержит тело объема $\Delta V(x)$; образующие цилиндров параллельны оси Ox и имеют длину, равную Δx . Объемы этих цилиндров равны соответственно $\pi m^2 \cdot \Delta x$ и $\pi M^2 \cdot \Delta x$. На основании свойства 2 объемов (п. 10.1) получаем

$$\pi m^2 \cdot \Delta x \leq \Delta V(x) \leq \pi M^2 \cdot \Delta x,$$

откуда

$$\pi m^2 \leq \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \leq \pi M^2.$$

Рассуждения для случая $\Delta x < 0$ проводятся аналогично и дают тот же результат.

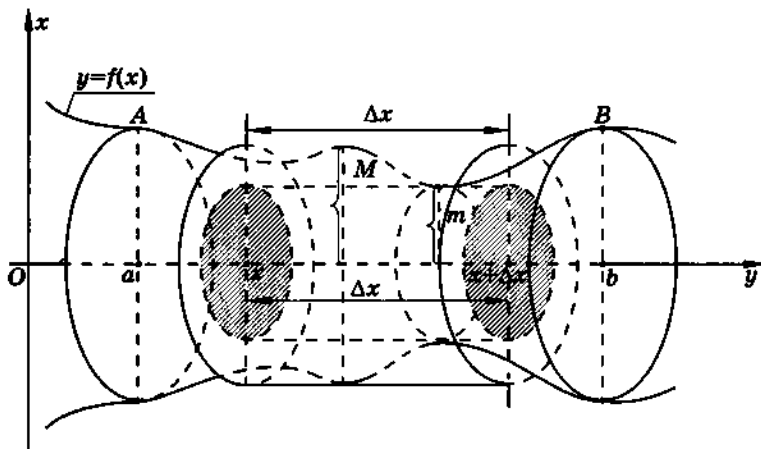


Рис. 223

Пусть теперь $\Delta x \rightarrow 0$. Имеем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M = f(x)$, тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \pi m^2 \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \pi M^2$$

или

$$\pi f^2(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \leq \pi f^2(x).$$

Значит, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = \pi f^2(x)$. По определению производной функции $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = V'(x)$. Поэтому $V'(x) = \pi f^2(x)$, следовательно, $V(x)$ — первообразная для $\pi f^2(x)$.

Таким образом, переменный объем $V(x)$ тела вращения представляет собой одну из первообразных для функции $\pi f^2(x)$ на отрезке $[a; b]$. Эта первообразная обладает тем свойством, что при $x = a$ она обращается в нуль ($V(a) = 0$), а при $x = b$ значение функции $V(x)$ равно объему тела вращения Φ ($V(b) = \Phi$).

Если $F(x)$ — также некоторая первообразная для функции $\pi f^2(x)$, то $V(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Так как $V(a) = 0$, то из равенства $V(a) = F(a) + C = 0$ находим $C = -F(a)$. Значит, $V(x) = F(x) - F(a)$. Тогда $V(b) = F(b) - F(a)$. Но $V(b) = \Phi$ — искомый объем тела вращения. Таким образом, $\Phi = F(b) - F(a)$, где $F(b)$ и $F(a)$ — значения первообразной для функции $\pi f^2(x)$ соответственно при $x = b$ и $x = a$. Это означает, что

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Вот почему объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

■ **ЗАДАЧА.** Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x}$, $x = 0$, $x = 2$ и $y = 0$ (рис. 224).

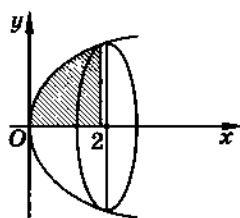


Рис. 224

Решение. Воспользуемся формулой $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$, для чего из уравнения $y = \sqrt{2x}$ находим $y^2 = 2x$. Тогда получаем

$$V = \pi \int_0^2 2x dx = 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \pi x^2 \Big|_0^2 = 4\pi.$$

Ответ: 4π .

1.2. Объемы конуса, шара и его частей

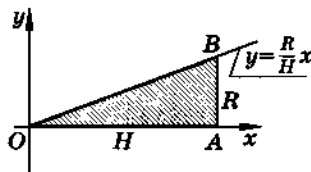
Используя формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ вычисления объема тела вращения, получим формулы для вычисления объема каждого изученного ранее тела вращения.

а) Объем конуса и усеченного конуса

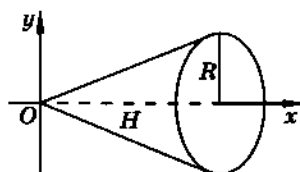
Теорема 1 (об объеме полного конуса). Объем V конуса с высотой H и радиусом основания R равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Доказательство. Конус с высотой H и радиусом основания R можно рассматривать как тело, образованное вращением вокруг оси Ox прямоугольного треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(H; 0)$ и $B(H; R)$ (рис. 225). Треугольник AOB является частным случаем криволинейной трапеции, которая ограничена графиком функции $y = \frac{R}{H}x$ ($0 \leq x \leq H$), осью Ox и от-



а)



б)

Рис. 225

резком прямой $x = H$. Поэтому, используя формулу (*) п. 1, для объема V конуса получаем

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

где πR^2 — площадь основания конуса. Теорема доказана. ▽

Теорема 2 (об объеме усеченного конуса). Объем усеченного конуса с высотой H и радиусами оснований r и R равен сумме объемов трех конусов с высотой H , радиусы оснований которых соответственно равны r , R и $\sqrt{rR}$:

$$V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + R^2 + rR)H.$$

Доказательство. Усеченный конус с высотой H и радиусами оснований r и R можно получить, вращая вокруг оси Ox прямоугольную трапецию $OABC$, где $O(0; 0)$, $A(0; r)$, $B(H; R)$, $C(H; 0)$ (рис. 226).

Прямая AB проходит через точки $(0, r)$ и (H, R) , поэтому ее уравнение имеет вид $y = \frac{R-r}{H}x + r$. Следовательно, трапеция

$OABC$ ограничена графиком функции $y = \frac{R-r}{H}x + r$ ($0 \leq x \leq H$),

осью Ox и отрезками прямых $x = 0$ и $x = H$. Поэтому, используя формулу (*) из п. 1.1, для объема V усеченного конуса получаем

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R-r}{H}x + r \right)^2 dx. \quad (1)$$

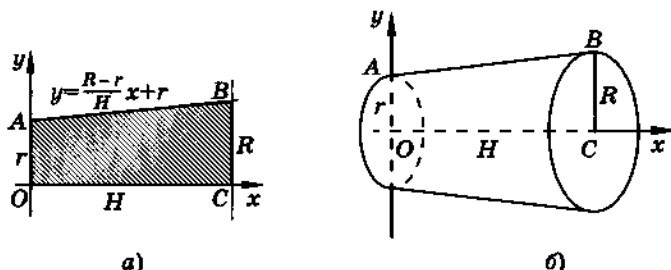


Рис. 226

Для вычисления интеграла сделаем замену переменных

$$\frac{R-r}{H}x + r = t. \quad (2)$$

Тогда $\frac{R-r}{H}dx = dt$, откуда $dx = \frac{H}{R-r}dt$. Новые пределы интегрирования (по переменной t) найдем посредством подстановки формулы (2): $x = 0 \Rightarrow t = r$; $x = H \Rightarrow t = R$. Таким образом, для объема V усеченного конуса получаем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_r^R \frac{H}{R-r} t^2 dt = \pi \frac{H}{R-r} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_r^R = \frac{\pi H}{3(R-r)} \cdot (R^3 - r^3) = \\ &= \frac{\pi H}{3} (r^2 + R^2 + rR), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ▼

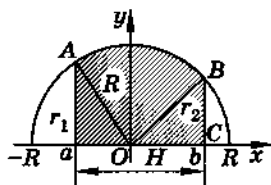
б) Объем шарового слоя

В прямоугольной декартовой системе координат Oxy рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную дугой окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $-R \leq a \leq x \leq b \leq R$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и отрезками aA и bB прямых соответственно $x = a$ и $x = b$ (рис. 227, а).

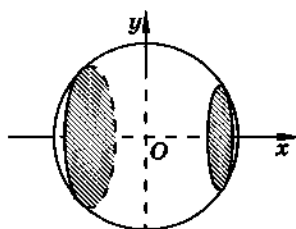
При вращении криволинейной трапеции $aABb$ вокруг оси Ox образуется шаровой слой (рис. 227, б). Найдем его объем, применяя формулу (*) п. 1.

Из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ имеем $y^2 = R^2 - x^2$. Поэтому для вычисления объема V шарового слоя получаем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \pi \left(R^2 b - \frac{b^3}{3} - R^2 a + \frac{a^3}{3} \right) = \\ &= \pi \left(R^2(b-a) - \frac{b^3 - a^3}{3} \right). \end{aligned}$$



а)



б)

Рис. 227

Таким образом, объем шарового слоя, отсекаемого от шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ плоскостями $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \left(R^2(b-a) - \frac{b^3 - a^3}{3} \right). \quad (**)$$

Пусть радиусы оснований шарового слоя равны r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$), а высота H (см. рис. 227, а). Тогда $H = b - a$, $r_1^2 = R^2 - a^2$, $r_2^2 = R^2 - b^2$.

Формулу (**) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi(b-a)}{3} (3R^2 - (b^2 + ab + a^2)) = \\ &= \frac{\pi(b-a)}{3} ((R^2 - b^2) + (R^2 - ab) + (R^2 - a^2)). \end{aligned}$$

Из системы равенств $(b-a)^2 = H^2$, $R^2 - a^2 = r_1^2$, $R^2 - b^2 = r_2^2$ после почленного сложения их левых и правых частей находим

$$R^2 - ab = \frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi(b-a)}{3} ((R^2 - b^2) + (R^2 - ab) + (R^2 - a^2)) = \\ &= \frac{\pi H}{3} \left(r_2^2 + \frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2} + r_1^2 \right) = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2). \end{aligned}$$

Таким образом, объем шарового слоя с радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой H вычисляется по формуле

$$V = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2). \quad (***)$$

в) Объем шара

При вращении полукруга $x^2 + y^2 = R^2$ (расположенного в плоскости Oxy , рис. 228, а) вокруг оси Ox образуется шар радиусом R (рис. 228, б). Из уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ данного полукруга имеем $y^2 = R^2 - x^2$. Тогда, полагая $a = -R$, $b = R$ в формуле (*) п. 1.1, находим объем V шара радиусом R :

$$\begin{aligned} V_{\text{ш}} &= \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

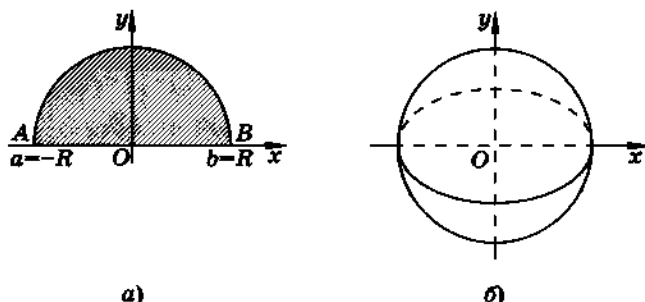


Рис. 228

Таким образом, имеет место следующая теорема

Теорема 3 (об объеме шара). Объем шара радиусом R вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш}} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

г) Объем шарового сегмента

Если $b = R$ (см. п. 1, б), то получаем криволинейную трапецию aAB (рис. 229, а), при вращении которой вокруг оси Ox образуется шаровой сегмент (рис. 229, б).

Пусть высота шарового сегмента равна H , тогда $a = R - H$. Так как дуга AB криволинейной трапеции aAB является частью окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (в плоскости Oxy), то формулу объема шарового сегмента получим по аналогии с выводом формулы для вычисления объема шара, учитывая при этом, что пределы a и b интегрирования равны: $a = R - H$, $b = R$, т. е.

$$\begin{aligned} V_{\text{ш. сегм}} &= \pi \int_{R-H}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-H}^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-H) + \frac{(R-H)^3}{3} \right) = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4 (об объеме шарового сегмента). Объем шарового сегмента, отсекаемого от шара радиусом R и имеющего высоту H , вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш. сегм}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

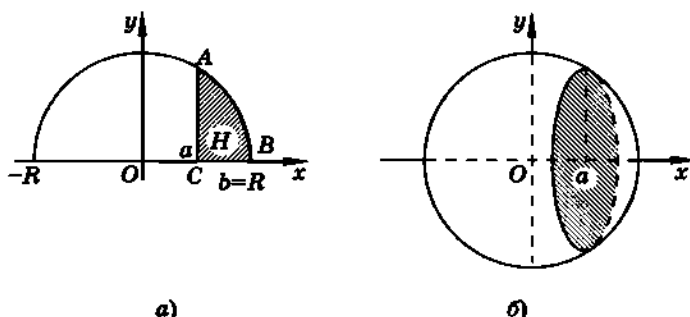


Рис. 229

Если в формуле (***) п. 1.2, б положить $r_2 = 0$, $r_1 = r$, то получим формулу для вычисления объема шарового сегмента с радиусом основания r и высотой H :

$$V_{\text{ш. сегм}} = \frac{\pi H}{6} (3r^2 + H^2).$$

д) Объем шарового сектора

Шаровой сектор состоит из конуса с вершиной в центре шара и шарового сегмента, имеющего с конусом общее основание (рис. 230). Пусть $R = OA$ — радиус шара; $AC = r$ — радиус основания шарового сегмента, $NC = H$ — его высота; N — точка сферы (рис. 230).

Найдем объемы конуса и шарового сегмента, учитывая, что высота h конуса равна $OC = ON - CN = R - H$.

Объем V_k конуса равен $\frac{1}{3} \pi \cdot AC^2 \cdot OC = \frac{1}{3} \pi r^2 (R - H)$. Выразим r^2 через R и H .

В прямоугольном треугольнике AOC находим $r^2 = AC^2 = OA^2 - OC^2 = R^2 - (R - H)^2 = H(2R - H)$. Значит,

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{1}{3} \pi H(2R - H)(R - H) = \\ &= \frac{\pi H}{3} (2R^2 - 3RH + H^2). \end{aligned}$$

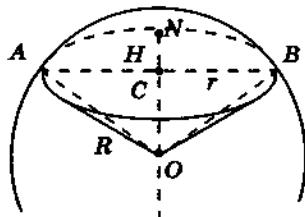


Рис. 230

Для объема шарового сегмента имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{ш. сегм}} &= \frac{\pi \cdot CN}{6} (3AC^2 + NC^2) = \frac{\pi H}{6} (3H(2R - H) + H^2) = \\ &= \frac{\pi H}{3} (3RH - H^2). \end{aligned}$$

Тогда для объема шарового сектора получаем

$$\begin{aligned} V_{\text{ш. сект}} &= V_{\text{к}} + V_{\text{ш. сегм}} = \frac{\pi H}{3} (2R^2 - 3RH + H^2) + \frac{\pi H}{3} (3RH - H^2) = \\ &= \frac{2}{3} \pi R^2 H. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема 5 (об объеме шарового сектора). Объем шарового сектора шара радиусом R вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш. сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H,$$

где H — высота шарового сегмента, соответствующего данному шаровому сектору.

В курсе математического анализа, который вам предстоит изучать в высшей школе, будет дано строгое обоснование применения определенного интеграла не только для нахождения объемов тел, но и для нахождения площадей поверхностей и длин дуг линий.

Найдите самостоятельно:

1. Объем тела, которое получается при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми $x = 3$, $x = 12$ и осью абсцисс. (Ответ: 4π .)
2. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной полуволевой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leq x \leq \pi$ оси абсцисс. (Ответ: $0,5\pi^2$.)
3. Объем тела, полученного при вращении кривой $y = 0,25x^2$ вокруг оси Oy в пределах от $y = 1$ до $y = 5$. (Ответ: 48π .)
4. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x^2$ и $y = x^3$. (Ответ: $\frac{256\pi}{35}$.)

2. О симметриях правильных многогранников

2.1. О самосовмещениях фигуры

Ранее были рассмотрены фигуры (куб, правильная пирамида и др.), имеющие центр (ось, плоскость) симметрии. Каждая из этих фигур при симметрии относительно точки (прямой, плоскости) отображается на себя. В таком случае говорят, что при данной симметрии фигура Φ *самосовмещается* (*совмещается сама с собой*), а преобразование симметрии при этом называют *самосовмещением* фигуры Φ .

Вместе с тем, кроме упомянутых симметрий, существуют другие виды движений, а также композиции таких движений, при которых происходят самосовмещения данной фигуры. Например, повороты на углы 90° , 180° , 270° и 360° вокруг прямой, проходящей через центры параллельных граней куба, являются самосовмещениями этого куба (рис. 231). Можно убедиться, что различные композиции этих поворотов также являются самосовмещениями данного куба.

Самосовмещениями правильной треугольной пирамиды (рис. 232) являются такие движения пространства, как, например, повороты на углы 120° , 240° и 360° вокруг прямой, содержащей высоту пирамиды, а также симметрия относительно плоскости, проходящей через эту высоту и боковое ребро. Композиции этих поворотов и плоскостной симметрии также являются самосовмещениями данной пирамиды.

Самосовмещениями правильного тетраэдра являются, например, такие движения пространства, как повороты на углы 120° , 240° и 360° вокруг прямой, содержащей высоту этого тетраэдра, а также повороты на угол 180° вокруг прямых, проходящих через середины его скрепляющихся ребер.

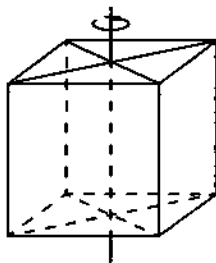


Рис. 231

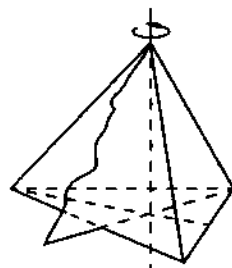


Рис. 232

Можно убедиться, что композиция любых двух из этих движений также является самосовмещением правильного тетраэдра.

Для движений пространства, самосовмещающих данную фигуру Φ , имеет место

Теорема 1 (теорема о самосовмещениях фигуры).

1. Если два движения пространства являются самосовмещениями фигуры Φ , то их композиция (в любом порядке) является также самосовмещением этой фигуры.
2. Если движение g является самосовмещением фигуры Φ , то обратное ему движение g^{-1} является также самосовмещением этой фигуры.
3. Тожественное преобразование E пространства является самосовмещением любой фигуры.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Как видно из приведенных выше примеров с кубом, правильной пирамидой и правильным тетраэдром, фигура Φ может иметь не единственное, а несколько самосовмещений. *Множество всех самосовмещений фигуры Φ называют группой самосовмещений или группой симметрий этой фигуры.*

 Понятие группы было введено французским математиком Эваристом Галуа (1811—1832) и является одним из фундаментальных понятий современной математики, применяемых в алгебре, геометрии, физике и других науках.

Так что же собой представляет абстрактное понятие «группа»?

Предварительно рассмотрим следующий вопрос.

Пусть G — множество любых элементов (этим множеством может быть, например, множество Z всех целых чисел, множество Q всех рациональных чисел, множество R всех действительных чисел; а может быть и не числовое множество, например, множество всех преобразований плоскости или множество всех преобразований пространства). Если любым *двум* элементам a и b множества G ставится в соответствие по определенному правилу некоторый элемент c этого же множества G , то говорят, что на множестве G задана операция (точнее, *бинарная операция*: лат. *binarius* — двойной) или множество G замкнуто относительно этой операции.

На числовых множествах такими операциями могут быть, например, операция сложения (которая обозначается символом «+», и тогда каждым двум числам a и b соответствует их сумма $a + b$) или операция умножения (которая обозначается символом « $\cdot$ », и тогда каждым двум числам a и b соответствует их произведение $a \cdot b$).

Если G — множество всех преобразований пространства, то на этом множестве нами в п. 2.3 была также определена операция — последовательное применение преобразований, которая обозначается символом « $\circ$ ». Согласно этой операции любым двум преобразованиям g_1 и g_2 пространства соответствует их композиция $g_2 \circ g_1$. Иногда композицию $g_2 \circ g_1$ преобразований g_1 и g_2 называют *произведением этих преобразований*.

Бинарную операцию, которую вводят на множестве G , можно обозначать любым отвлеченным символом, например символом « $*$ ». Согласно выше сказанному, символ « $*$ » принимает конкретный смысл: «+» — сложение чисел, « $\cdot$ » — умножение чисел, « $\circ$ » — последовательное применение преобразований.

Теперь введем определение понятия группы.

Определение. Непустое множество G элементов $a, b, c, \dots$, на котором определена операция « $*$ », называется группой (относительно этой операции), если для любых элементов $a, b, c, \dots$ множества G выполняются следующие условия:

- 1) $a * (b * c) = (a * b) * c$ (т. е. операция « $*$ » ассоциативна);
- 2) во множестве G существует такой элемент e , что для любого элемента a этого множества выполняется равенство: $e * a = a * e = a$ (элемент e называют *нейтральным элементом группы*);
- 3) для любого элемента a множества G существует такой элемент a^{-1} этого же множества G , что справедливо равенство $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (элемент a^{-1} называется *обратным элементом* a).

Если, кроме того, для любых двух элементов a и b множества G выполняется равенство $a * b = b * a$ (операция « $*$ » коммутативна), то группа G называется *коммутативной (или абелевой)*.

Рассмотрим некоторые примеры.

1) Множество всех целых чисел является группой относительно операции сложения, так как: операция сложения целых чисел ассоциативна; роль нейтрального элемента группы играет число 0, а роль обратного элемента для любого целого числа a играет число $-a$. Но множество Z не является группой относительно операции умножения, так как обратным для любого целого числа $a \neq 1$ является число $a^{-1} = \frac{1}{a}$ — не целое, а следовательно, не принадлежащее множеству Z (не выполняется условие 3).

2) Множество Q всех рациональных чисел является группой относительно операции сложения (роль нейтрального элемента группы играет число 0), а множество Q всех рациональных чисел, отличных от нуля, является группой относительно операции умножения (роль нейтрального элемента группы играет число 1).

3) Множество всех векторов пространства является группой относительно операции сложения векторов (роль нейтрального элемента в группе играет нуль-вектор).

Все эти три группы являются абелевыми, так как операция сложения чисел и операция сложения векторов коммутативны.

4) Множество всех преобразований пространства является группой, так как: определенная на этом множестве операция — композиция преобразований обладает свойством ассоциативности (см. п. 2.3); роль нейтрального элемента в группе преобразований играет тождественное преобразование E (для любого преобразования g имеет место $g \circ E = E \circ g = g$ (см. п. 2.2)) и, наконец, для любого преобразования g существует обратное ему преобразование g^{-1} такое, что $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = E$ (см. п. 2.3).

5) Множество всех движений пространства является группой, так как композицией двух любых движений пространства является движение этого пространства, а преобразованием, обратным любому движению, является движение, и тождественное преобразование E является движением, играющим роль нейтрального элемента этой группы.

6) Так как самосовмещения любой фигуры Φ происходят при движениях пространства и различных их композициях, причем композиция движений, а следовательно, и композиция самосовмещений данной фигуры обладает свойством ассо-

циативности, то с учетом утверждения теоремы 1 приходим к выводу: множество G_Φ всех самосовмещений любой фигуры Φ является группой, которую называют группой симметрий этой фигуры. 

2.2. Об элементах симметрии правильного многогранника. Двойственные правильные многогранники

При сравнении самосовмещений правильного тетраэдра и правильной треугольной пирамиды можно обнаружить, что число различных самосовмещений правильного тетраэдра превосходит число самосовмещений правильной треугольной пирамиды, т. е. правильный тетраэдр «симметричнее» правильной треугольной пирамиды. Аналогично, если рассмотреть самосовмещения куба и любой правильной четырехугольной призмы, то обнаружится, что куб «симметричнее» правильной четырехугольной призмы. По-видимому, тем и объясняется тот факт, что правильные многогранники всегда привлекали к себе внимание людей своей «симметричностью», являясь «самыми симметричными» многогранниками из множества всех существующих многогранников.

Так как все самосовмещения любой фигуры образуют группу симметрий этой фигуры, то, естественно, представляет интерес, какие движения пространства образуют группу симметрий каждого из пяти правильных многогранников.

Прежде чем приступать к рассмотрению этого вопроса, введем необходимые в дальнейшем определения некоторых понятий.

Прямая, вокруг которой происходит поворот, самосовмещающий фигуру Φ , называется *осью поворотной симметрии фигуры Φ* . Например, осью поворотной симметрии правильной треугольной пирамиды (см. рис. 229) является прямая, содержащая высоту пирамиды.

Если самосовмещением фигуры является зеркальный поворот, то ось поворота называется *осью зеркально-поворотной симметрии*. Например, прямая, проходящая через центры параллельных граней куба (см. рис. 228), является его осью зеркально-поворотных симметрий с углами поворотов 90° , 180° , 270° ; плоскостью симметрии при этом служит плоскость, проходящая через центр куба перпендикулярно оси вращения.

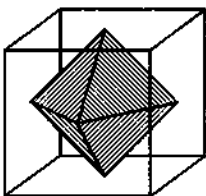


Рис. 233

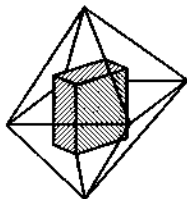


Рис. 234

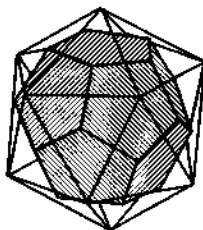


Рис. 235

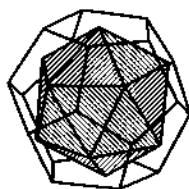


Рис. 236

Центр симметрии, плоскость симметрии и оба вида осей симметрии, имеющиеся у фигуры Φ , называются ее элементами симметрии. Каждому элементу симметрии фигуры соответствует определенное ее самосовмещение — элемент группы симметрии этой фигуры.

Далее заметим, что число вершин куба равно числу граней правильного октаэдра, а число вершин правильного октаэдра равно числу граней куба. Число ребер у этих многогранников одно и то же. Поэтому *куб и правильный октаэдр называют двойственными многогранниками*. Более того, *центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра* (см. задачу 2.347) (рис. 233), а *центры граней правильного октаэдра — вершинами куба* (см. задачу 2.354) (рис. 234).

Аналогично можно убедиться, что *двойственными являются правильный икосаэдр и правильный додекаэдр*, при этом *центры граней правильного икосаэдра служат вершинами правильного додекаэдра* (рис. 235), а *центры граней правильного додекаэдра — вершинами правильного икосаэдра* (рис. 236).

Так как любое самосовмещение правильного многогранника является самосовмещением двойственного ему правильного многогранника (почему?), то *группы симметрий двойственных правильных многогранников совпадают*. Поэтому для изучения групп симметрий каждого из правильных многогранников достаточно рассмотреть группы симметрий правильного тетраэдра, куба и правильного икосаэдра.

2.3. Группа симметрий правильного тетраэдра

Прямая, содержащая высоту OP правильного тетраэдра $PABC$ (рис. 287), является осью поворотных симметрий этого тетраэдра с углами поворотов 120° , 240° (поворот на угол 360° явля-

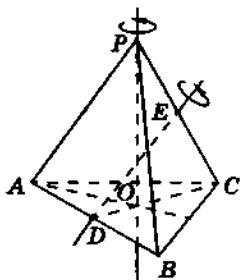


Рис. 237

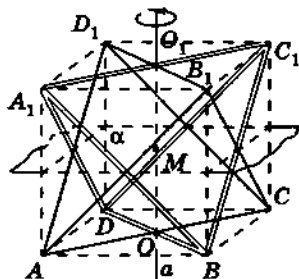


Рис. 238

ется тождественным преобразованием). Правильный тетраэдр имеет 4 такие оси поворотных симметрий.

Прямая DE , проходящая через середины D и E противоположных ребер CP и AB правильного тетраэдра $PABC$, перпендикулярна каждому из них. Поэтому прямая DE является также осью поворотной симметрии с углом поворота 180° . Правильный тетраэдр имеет 3 такие оси симметрии.

Плоскость, проходящая через ребро правильного тетраэдра и середину противоположного ребра, служит его плоскостью симметрии. Правильный тетраэдр имеет 6 таких плоскостей симметрии.

Исследуем вопрос о наличии у правильного тетраэдра оси зеркально-поворотной симметрии. В целях наглядности рассмотрим правильный тетраэдр $T = AB_1CD_1$ вместе с кубом $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 238).

Пусть a — прямая, проходящая через середины O и O_1 противоположных ребер AC и B_1D_1 правильного тетраэдра T ; α — плоскость, проходящая через центр M тетраэдра T (он совпадает с центром куба K) и перпендикулярная прямой a .

При композиции поворота на угол 90° вокруг прямой a и симметрии относительно плоскости α происходит самосовмещение правильного тетраэдра T . Самосовмещением тетраэдра T является и композиция $S_\alpha \circ R_a^{270^\circ}$. Это означает, что прямая a является осью зеркально-поворотных симметрий тетраэдра T . Правильный тетраэдр имеет 3 такие оси зеркально-поворотных симметрий.

Таким образом, правильный тетраэдр имеет следующие элементы симметрии: 4 оси поворотных симметрий с углами поворота 120° , 240° ; 3 оси поворотных симметрий с уг-

лами поворота 180° ; 3 оси зеркально-поворотных симметрий с углами поворотов 90° , 270° ; 6 плоскостей симметрии. Учитывая тождественное преобразование, находим, что элементы симметрии правильного тетраэдра определяют

$$4 \cdot 2 + 3 + 3 \cdot 2 + 6 + 1 = 24$$

его симметрии, т. е. группа симметрий правильного тетраэдра состоит из 24 различных самосовмещений. Это число равно удвоенному числу плоских углов тетраэдра.

2.4. Группа симметрий куба

Найдем элементы симметрии куба (правильного гексаэдра).

Точка M пересечения диагоналей куба (рис. 239) является его центром и служит центром симметрии этого куба.

Куб имеет 3 плоскости симметрии, каждая из которых проходит через центр куба параллельно его граням, и 6 плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через его противоположные ребра (рис. 239).

Прямая OO_1 , проходящая через центры O и O_1 параллельных граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба (см. рис. 239), является осью поворотных симметрий с углами поворотов 90° , 180° , 270° . Так как у куба 3 пары параллельных граней, то он имеет 3 такие оси поворотных симметрий.

Прямая PK , проходящая через середины противоположных ребер куба (см. рис. 239), является осью поворотной симметрии с углом поворота 180° . Куб имеет 6 таких осей симметрии.

Так как треугольники A_1BD и B_1CD_1 — правильные (почему?) (рис. 240) и диагональ AC_1 перпендикулярна плоскостям этих треугольников (почему?), то прямая AC_1 служит осью поворотных симметрий куба с углами поворотов 120° , 240° . Куб имеет 4 такие оси симметрии.

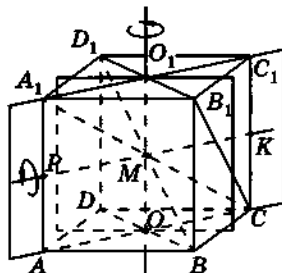


Рис. 239

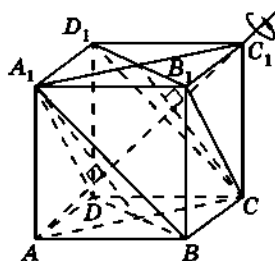


Рис. 240

Прямая OO_1 (см. рис. 239) является осью зеркально-поворотных симметрий с углами поворотов 90° , 270° , где плоскостью симметрии служит плоскость, проходящая через центр M куба перпендикулярно прямой OO_1 . Куб имеет 3 такие оси зеркально-поворотных симметрий.

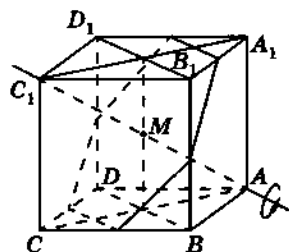


Рис. 241

Наконец, пересечением куба и плоскости, проходящей через его центр M перпендикулярно диагонали AC_1 , является правильный шестиугольник (докажите это, рис. 241). Композиции поворотов на углы 60° и 300° вокруг прямой AC_1 и симметрии относительно плоскости этого шестиугольника являются зеркальными поворотами куба. Поэтому прямая AC_1 служит осью зеркально-поворотных симметрий куба. Куб имеет 4 такие оси симметрии.

Таким образом, у куба имеются следующие элементы симметрии: 1 центр симметрии; 9 плоскостей симметрии; 3 оси поворотных симметрий, каждая из которых с углами поворотов 90° , 180° , 270° ; 4 оси поворотных симметрий, каждая из которых с углами поворотов 120° , 240° ; 6 осей поворотных симметрий с углом поворота 180° ; 3 оси зеркально-поворотных симметрий (каждая с углами поворотов 90° , 270°); 4 оси зеркально-поворотных симметрий (каждая с углами поворотов 60° , 300°).

Учитывая тождественное преобразование, находим, что элементы симметрии куба определяют

$$1 + 9 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 = 48$$

его симметрий, т. е. группа симметрий куба состоит из 48 различных самосовмещений. Это число равно удвоенному числу плоских углов куба.

2.5. Группа симметрий правильного икосаэдра

Попробуем перечислить все элементы симметрии правильного икосаэдра.

Можно убедиться, что правильный икосаэдр J имеет центр, который является его центром симметрии. Пусть O — центр симметрии правильного икосаэдра J (рис. 242). Это означает, что если точка M_1 — вершина икосаэдра J , то на прямой OM_1

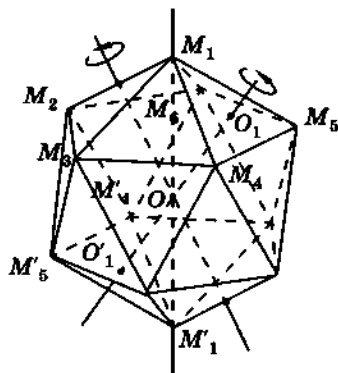


Рис. 242

лежит еще одна его вершина M'_1 — точка, симметричная вершине M_1 относительно центра O .

Так как все грани правильного икосаэдра — равные правильные треугольники, то пирамида $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ является правильной пятиугольной. Поэтому прямая M_1O проходит через центр основания этой пирамиды и служит ее осью вращения, а следовательно, осью поворотных симметрий икосаэдра J с углами поворо-

тов $\frac{2\pi k}{5}$ (где $k = 1; 2; 3; 4$). Правильный икосаэдр имеет 6 таких осей поворотных симметрий. Каждая из них проходит через центр O симметрии икосаэдра и, следовательно, является осью зеркально-поворотных симметрий икосаэдра J с такими же углами поворотов.

Пусть O_1 — центр правильного треугольника $M_1M_4M_5$ (рис. 242), являющегося гранью икосаэдра J . Тогда правильный треугольник $M'_1M'_4M'_5$, симметричный треугольнику $M_1M_4M_5$ относительно центра O , является также гранью икосаэдра J и имеет своим центром точку $O'_1 = S_O(O_1)$. Это означает, что прямая $O_1O'_1$ есть ось поворотных симметрий икосаэдра J с углами поворотов 120° и 240° . Правильный икосаэдр имеет 10 таких осей поворотных симметрий. Каждая из них проходит через центр симметрии O икосаэдра, поэтому является его осью зеркально-поворотных симметрий с такими же углами поворотов.

Кроме того, правильный икосаэдр имеет 15 осей поворотных симметрий с углом поворота 180° , каждая из которых проходит через середины двух его ребер, симметричных относительно центра O .

Плоскость, проходящая через центр O икосаэдра J перпендикулярно одной из его осей симметрии, является плоскостью симметрии этого икосаэдра. Правильный икосаэдр имеет 15 таких плоскостей симметрии.

Учитывая тождественное преобразование, находим, что элементы симметрии правильного икосаэдра определяют

$$1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 15 + 15 + 1 = 120$$

его симметрий, т. е. группа симметрий правильного икосаэдра состоит из 120 самосовмещений. Это число равно удвоенному числу плоских углов правильного икосаэдра.

Так как правильный октаэдр двойственен кубу, а правильный додекаэдр — икосаэдру, то группа симметрий правильного октаэдра содержит 48 самосовмещений, а группа симметрий правильного додекаэдра — 120 самосовмещений. Число 120 вдвое больше числа плоских углов додекаэдра, а число 48 вдвое больше числа плоских углов правильного октаэдра.

Оказывается, справедлива следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема. Число элементов группы симметрий правильного многогранника равно удвоенному числу его плоских углов.

3. О поверхностях второго порядка

3.1. Поверхности вращения в координатах

Пусть $f(x, y, z) = 0$ — уравнение с переменными x, y, z ; Φ — некоторая поверхность (на рис. 243 изображена часть этой поверхности). Из курса 10 класса известно, что уравнение $f(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности Φ , если этому уравнению удовлетворяют координаты x, y, z любой точки M этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни какой точки пространства, не принадлежащей поверхности Φ .

Если $f(x, y, z)$ — многочлен, то его степень называют **порядком поверхности Φ** .

Мы знаем, например, что сфера с центром $K(a; b; c)$ и радиусом $R > 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Из этого уравнения следует, что сфера — поверхность второго порядка.

Заметим, что уравнение второго порядка может задавать «поверхность», состоящую из двух плоскостей. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$

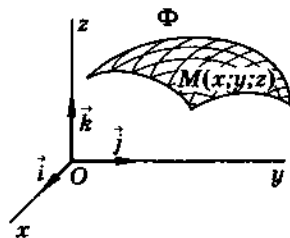


Рис. 243

задает пару пересекающихся плоскостей, одна из которых имеет уравнение $y = 0$, другая — уравнение $x + y = 0$.

Если в пространстве некоторая линия γ является пересечением двух поверхностей Φ_1 и Φ_2 заданных уравнениями $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$, то координаты x, y, z любой точки M линии γ удовлетворяют каждому из этих уравнений, т. е. удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В этом случае говорят, что система уравнений (1) задает линию γ .

Разрешив уравнения этой системы относительно x и y (если это возможно), получим систему уравнений

$$\begin{cases} x = g_1(z), \\ y = g_2(z), \end{cases} \quad (2)$$

равносильную системе (1), следовательно, задающую ту же самую линию γ .

Если линию γ вращать вокруг некоторой прямой m , то при этом вращении образуется некоторая поверхность Φ , которую называют **поверхностью вращения**, а прямую m — **осью вращения** или осью симметрии этой поверхности (вспомните сферическую и сегментную поверхности).

Для получения уравнения поверхности Φ достаточно выбрать на ней любую точку $M(X; Y; Z)$ и выразить в координатной форме свойство, которым обладают только точки $M(X; Y; Z) \in \Phi$; в результате получим уравнение относительно X, Y, Z , которое и является искомым уравнением поверхности Φ .

Составим уравнение поверхности Φ , которая образуется вращением вокруг оси Oz линии γ , заданной системой уравнений (2). Для этого через произвольную точку $M(X; Y; Z) \in \Phi$ проведем плоскость, перпендикулярную оси Oz , т. е. плоскость $z = Z$ (рис. 244). Эта

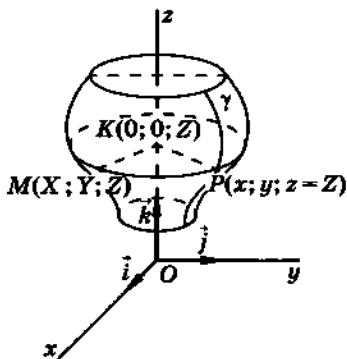


Рис. 244

плоскость пересекает поверхность Φ по окружности с центром $K(0; 0; Z)$ на оси вращения Oz , а линию γ — в некоторой точке $P(x; y; z = Z)$. Так как $KM = KP$, то

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2. \quad (3)$$

Учитывая, что $z = Z$, имеем для x и y в системе (2):

$$\begin{cases} x = g_1(Z), \\ y = g_2(Z). \end{cases}$$

После подстановки этих значений x и y в уравнение (3) получаем искомое уравнение поверхности Φ с осью вращения Oz в виде:

$$X^2 + Y^2 = g_1^2(Z) + g_2^2(Z). \quad (4)$$

(Обратите внимание: правая часть уравнения (4) есть некоторая функция f переменной Z , т. е. $f(Z) = g_1^2(Z) + g_2^2(Z)$.)

Справедливо обратное утверждение: любое уравнение $X^2 + Y^2 = f(Z)$ задает поверхность вращения с осью Oz , так как сечением этой поверхности плоскостью $Z = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$) является окружность с центром на оси Oz .

Из сказанного следует: чтобы получить уравнение поверхности, которая образуется вращением вокруг оси Oz линии, заданной системой уравнений (1), достаточно выразить x и y через z , после чего сложить квадраты левых и правых частей полученных равенств.

Аналогично получают уравнения поверхностей, образованных вращением линии вокруг осей Ox и Oy .

3.2. Поверхности вращения второго порядка

Рассмотрим некоторые поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг своих осей симметрии.

а) Сфера

Пусть окружность радиусом R с центром в начале системы координат $Oxyz$, расположенная в плоскости Oyz (рис. 245, а), задана системой уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

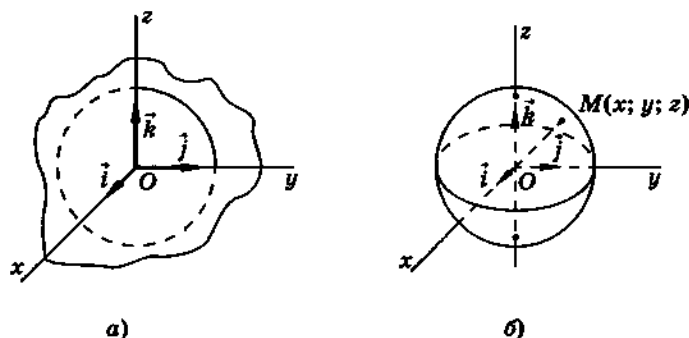


Рис. 245

Поверхностью, образованной вращением этой окружности вокруг оси Oz , является известная вам сфера (*сферическая поверхность*) (рис. 245, б).

Уравнение этой сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (5)$$

получим после сложения левых и правых частей равенств $y^2 = R^2 - z^2$ и $x^2 = 0$. Уравнение (5) называется *каноническим (простейшим) уравнением сферы*.

б) Эллипсоид вращения

Из планиметрии известно, что *эллипсом* называется множество всех точек M плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами (рис. 246, а).

Эллипс с центром в начале координат и осями симметрии Ox и Oy задается каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (где a и b — длины полуосей эллипса).

Пусть эллипс расположен в плоскости Oyz и задан системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

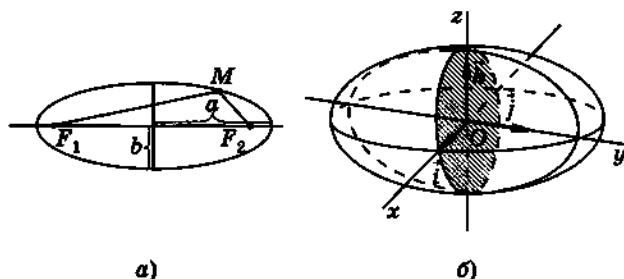


Рис. 246

Поверхность, образованная вращением эллипса вокруг его оси симметрии, называется **эллипсоидом вращения**.

Будем вращать эллипс, заданный системой уравнений (6), вокруг оси Oz . Чтобы получить уравнение образованного при этом эллипсоида вращения (рис. 246, б), из первого уравнения системы (6) находим $y^2 = \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)a^2$. Тогда после сложения этого уравнения и уравнения $x^2 = 0$ и последующего преобразования получаем искомое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (6a)$$

которое называется **каноническим уравнением эллипсоида вращения**.

Из уравнения (6a) видно, что любая плоскость $z = m$ ($m < b$), перпендикулярная оси вращения эллипсоида, пересекает его по окружности с центром $(0; 0; m)$ на оси Oz и радиусом

$$R = a \sqrt{1 - \frac{m^2}{b^2}}.$$

в) Параболоид вращения

Из планиметрии известно, что **параболой** называется множество всех точек M плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки F , называемой **фокусом**, равно расстоянию до данной прямой a , называемой **директрисой** (рис. 247, а) параболы.

Парабола с вершиной в начале системы координат Oxy и осью симметрии Ox задается каноническим уравнением:

$y^2 = 2px$, где p — расстояние между фокусом и директрисой. При $2p = 1$ парабола имеет уравнение $y^2 = x$.

Поверхность, образованная вращением параболы вокруг ее оси симметрии, называется **параболоидом вращения** (рис. 247, б). Вершина параболы при этом называется **вершиной параболоида** вращения.

Парабола, расположенная в координатной плоскости Oyz и имеющая своей вершиной начало координат, а осью симметрии — координатную ось Oz , может быть задана в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ системой уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = z, \\ x = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Будем вращать эту параболу вокруг оси Oz . Уравнение

$$x^2 + y^2 = z \quad (7a)$$

образованного при этом параболоида вращения (рис. 247, б) получим после почленного сложения уравнений

$$y^2 = z \text{ и } x^2 = 0.$$

Уравнение (7a) называется **каноническим уравнением параболоида вращения с осью вращения Oz** . Из этого уравнения (7a) видно, что любая плоскость, перпендикулярная оси вращения (такая плоскость имеет уравнение $z = m$, $m > 0$), пересекает данный параболоид по окружности с центром $(0; 0; m)$ на оси Oz и радиусом $R = \sqrt{m}$.

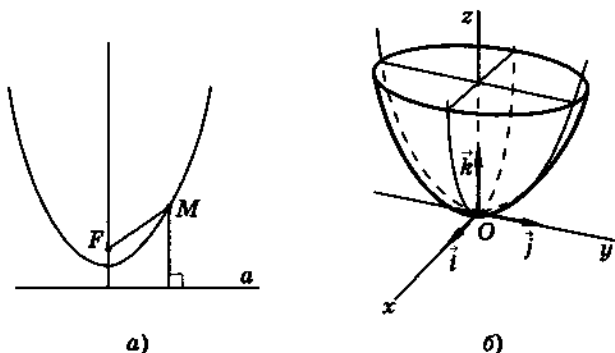


Рис. 247

г) Гиперболоиды вращения

Из планиметрии известно, что *гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Гипербола с действительной осью Ox и мнимой осью Oy (рис. 248, а) в системе координат Oxy задается каноническим уравнением: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Пусть гипербола расположена в координатной плоскости Oyz и задана системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Координатная ось Oy является действительной осью данной гиперболы, а координатная ось Oz — ее мнимой осью.

Если вращать данную гипербола вокруг ее действительной оси (оси Oy), то получим поверхность, состоящую из двух частей. Эти части называют *полостями* (или *лоаами*), а полученная при этом поверхность называется *двуполостным гиперболоидом вращения* (рис. 248, б).

Найдем уравнение этой поверхности.

Из уравнений (8) имеем:

$$\begin{cases} z^2 = \left(\frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \cdot c^2, \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

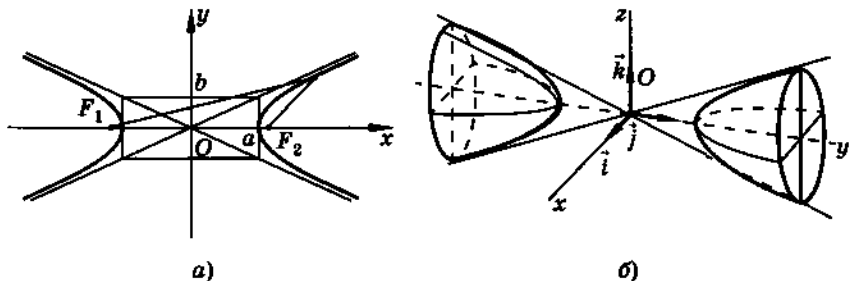


Рис. 248

После элементарных преобразований получаем искомое уравнение

$$-\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (8a)$$

которое называется **каноническим уравнением двуполостного гиперboloида вращения с осью Oy** .

Вращая ту же самую гиперболу $\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг ее

мнимой оси (т. е. вокруг оси Oz), получим поверхность, которая называется **однополостным гиперboloидом вращения** (рис. 249, а). Рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем каноническое уравнение этого гиперboloида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (86)$$

Любая плоскость $z = m$, перпендикулярная оси вращения однополостного гиперboloида (рис. 249, б), пересекает этот гиперboloид по окружности с центром $(0; 0; m)$ на оси Oz и радиусом $R = a\sqrt{1 + \frac{m^2}{c^2}}$. Из выражения для вычисления радиуса окружности — сечения видно, что самым «узким» сечением нашего гиперboloида является окружность радиуса a . Эта окружность получается при пересечении данного гиперboloида

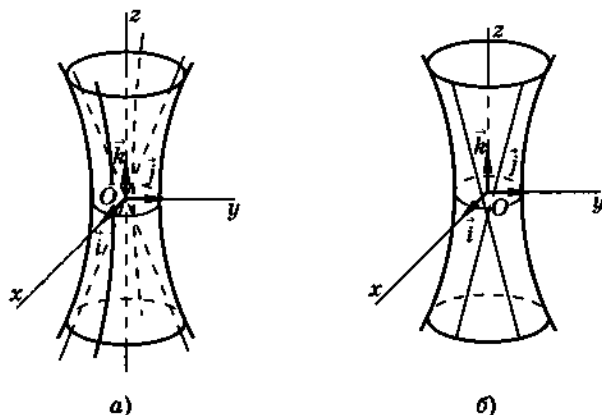


Рис. 249

плоскостью $z = 0$ и называется *горловой окружностью* (или *горловиной*) однополостного гиперboloида.

Если вращать вокруг оси Oz прямую

$$\begin{cases} \frac{y}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = a \end{cases} \quad (8в)$$

(эта прямая лежит в плоскости $x = a$ и не параллельна оси Oz , см. рис. 249, б), то при этом вращении образуется тот же однополостный гиперboloид.

В самом деле, из уравнений (8в) имеем:

$$\begin{cases} y^2 = \frac{z^2}{c^2} \cdot a^2, \\ x^2 = a^2. \end{cases}$$

После почленного сложения уравнений этой системы и последующего преобразования полученного уравнения приходим к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

совпадающему с уравнением (8б), следовательно, задающего тот же самый однополостный гиперboloид.

Но если вращать вокруг оси Oz прямую, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ x = a \end{cases} \quad (8г)$$

(эта прямая также лежит в плоскости $x = a$ и не параллельна оси Oz , см. рис. 249, б), то при этом вращении вновь образуется однополостный гиперboloид, заданный уравнением (8б).

Поверхность, образованную движением прямой, называют линейчатой поверхностью, а прямые, целиком лежащие на этой поверхности, называют ее прямолинейными образующими.

Из сказанного следует, что однополостный гиперboloид является линейчатой поверхностью. При этом: множество всех прямых, образованное движением прямой (8в) представляет собой одну серию прямолинейных образующих однополостного гиперboloида (8б) («полуквадрику»), а множество всех прямых, образованное движением прямой (8г), — другую серию

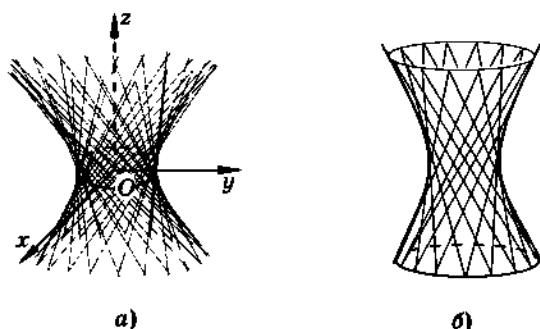


Рис. 250

прямолинейных образующих этого гиперboloида (вторую «полуквадрику»).

Примечательным является тот факт, что любые две образующие разных серий однополостного гиперboloида пересекаются, а любые две его образующие одной серии скрещиваются (рис. 250).

д) Коническая поверхность вращения

Пусть кривая второго порядка состоит из двух пересекающихся в начале координат прямых, расположенных в плоскости Oyz (рис. 251, а), и задана системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Если эту пару пересекающихся прямых вращать вокруг оси Oz , то получим поверхность, которая состоит из двух частей, называемых *полостями* (или *полами*), а сама поверхность называется *конической поверхностью вращения* (рис. 251, б). Иногда эту поверхность в целях краткости называют просто *конусом вращения*.

Из определения конической поверхности следует, что она является линейчатой поверхностью.

Чтобы получить уравнение этой конической поверхности, находим:

$$\begin{cases} y^2 = \frac{z^2}{c^2} \cdot a^2, \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

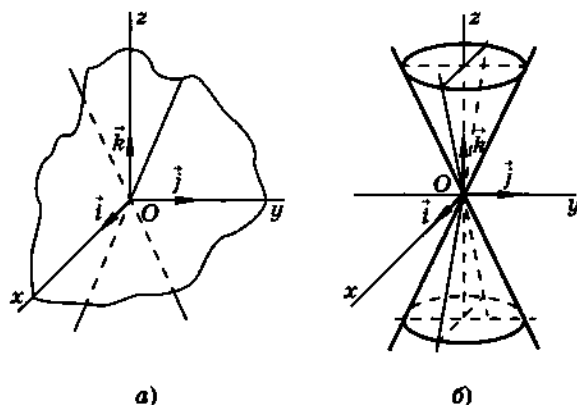


Рис. 251

После почленного сложения уравнений системы и последующего преобразования полученного уравнения приходим к уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (9a)$$

которое называется **каноническим уравнением конической поверхности вращения с осью вращения Oz** .

Если же вращать ту же пару прямых вокруг оси Oy (которая также является их осью симметрии), то получим вновь коническую поверхность вращения, но ее каноническое уравнение имеет другой вид, а именно:

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (9б)$$

! Обратите внимание! Правая часть канонического уравнения конической поверхности равна нулю, а знак « $\leftrightarrow$ » в левой части уравнения «указывает» на ось вращения этой поверхности.

е) Цилиндрическая поверхность вращения

Пусть кривая второго порядка состоит из двух параллельных прямых, лежащих в плоскости Oyz (рис. 252, а), и задана системой уравнений

$$\begin{cases} y^2 - a^2 = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (10)$$

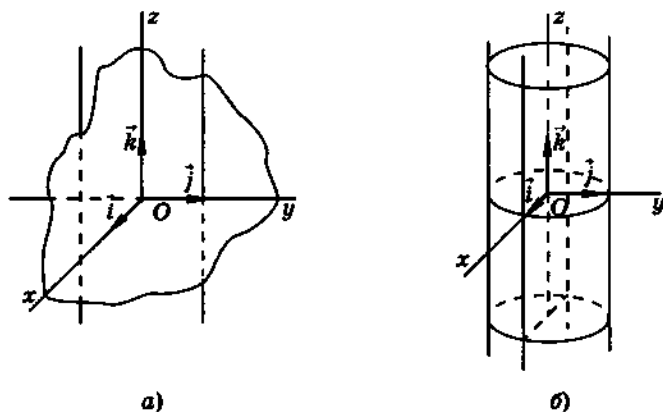


Рис. 252

Если эту пару параллельных прямых вращать вокруг оси Oz (координатная ось Oz является осью симметрии прямых $\begin{cases} y - a = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y + a = 0, \\ x = 0, \end{cases}$ на которые распадается кривая второго порядка $\begin{cases} y^2 - a^2 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$), то получим поверхность, которая называется *цилиндрической поверхностью вращения* (рис. 252, б). Иногда эту поверхность в целях краткости называют просто *цилиндром вращения*.

Из определения цилиндрической поверхности следует, что она является линейчатой поверхностью.

После почленного сложения уравнений системы $\begin{cases} y^2 = a^2, \\ x^2 = 0 \end{cases}$ получаем искомое уравнение этой поверхности

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (10a)$$

которое называется *каноническим уравнением цилиндрической поверхности вращения с осью вращения Oz* .

Если эту же пару параллельных прямых вращать вокруг оси Oy , то получим поверхность второго порядка, состоящую из двух параллельных плоскостей (рис. 253) (иногда говорят, распавшуюся на две параллельные плоскости). Их уравнение имеет вид

$$y^2 - a^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) нельзя получить из уравнений (10) по правилу, установленному в п. 1, так как из этих уравнений y не выражается как функция z .

Цилиндрическую поверхность вращения с осью вращения Oz , заданную уравнением (10а), можно получить непрерывным движением прямой, параллельной оси Oz и пересекающей расположенную в плоскости Oxy окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0. \end{cases}$

Эта окружность называется *направляющей цилиндрической поверхности*.

Таким же образом можно получить другие цилиндрические поверхности. К ним относятся:

— эллиптический цилиндр, направляющей которого служит эллипс. Если образующие эллиптического цилиндра параллельны оси Oz , то его каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Изображение этого цилиндра совпадает с изображением цилиндра вращения (см. рис. 252, б);

— параболический цилиндр, направляющей которого служит парабола. Если образующие параболического цилиндра параллельны оси Oz , а парабола расположена в плоскости Oxy (рис. 254), то такой цилиндр может быть задан уравнением:

$$x^2 = y; \quad (13)$$

— гиперболический цилиндр, направляющей которого служит гипербола. Если образующие гиперболического цилиндра

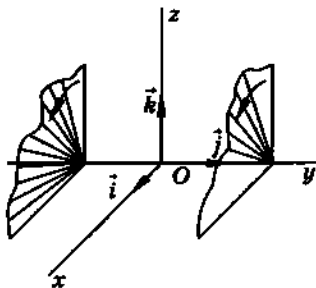


Рис. 253

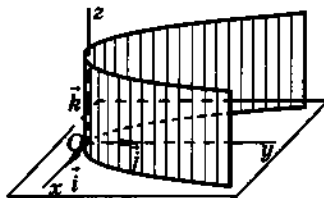


Рис. 254

параллельны оси Oz , а гипербола расположена в плоскости Oxy (рис. 255), то он может быть задан уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Мы получили только канонические (простейшие) уравнения каждой из рассмотренных выше поверхностей второго порядка. Такие уравнения имеют рассмотренные поверхности вследствие частного, наиболее «удобного», их расположения относительно системы координат $Oxyz$. Но если, например, сфера радиусом $R = 4$ имеет своим центром не начало координат, а точку $A(2; -3; -1)$, то эта сфера задается уравнением

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 16,$$

которое после раскрытия скобок приводится также к уравнению второго порядка

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + 2 = 0.$$

В этом уравнении сферы число членов больше, чем в каноническом ее уравнении (5). Аналогично, каждая из рассмотренных выше поверхностей второго порядка — эллипсоид, параболоид, гиперboloиды, цилиндр и конус, будучи расположенной общим образом относительно системы координат $Oxyz$, может быть задана общим уравнением второго порядка относительно переменных x, y, z . Поэтому вводится такое определение.

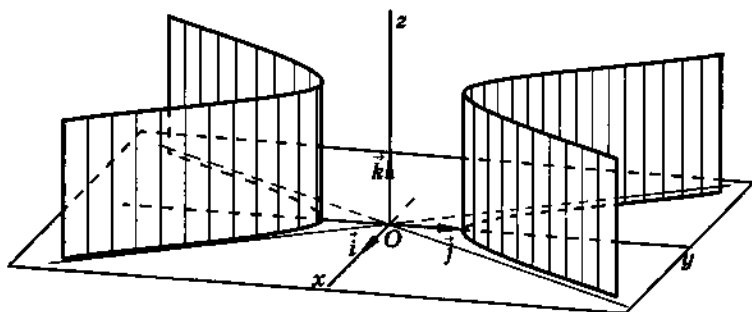


Рис. 255

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек $M(x; y; z)$ пространства, координаты x, y, z которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Это уравнение называется **общим уравнением поверхности второго порядка** (коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ одновременно не равны нулю). Так как поверхности второго порядка задаются квадратными уравнениями, то эти поверхности кратко называют **квадриками**.

3.3. Линии второго порядка как плоские сечения конической поверхности

Пусть дана коническая поверхность вращения с вершиной в точке S и осью вращения a . Из определения конической поверхности следует, что любая плоскость, проходящая через вершину S и ось a конической поверхности, пересекает эту поверхность по двум ее линейным образующим (рис. 256, а), т. е. по кривой второго порядка, распавшейся на две пересекающиеся прямые.

Мы рассмотрим вопрос о пересечении конической поверхности вращения и любой плоскости, не проходящей через вершину этой поверхности. Из определения конической поверх-

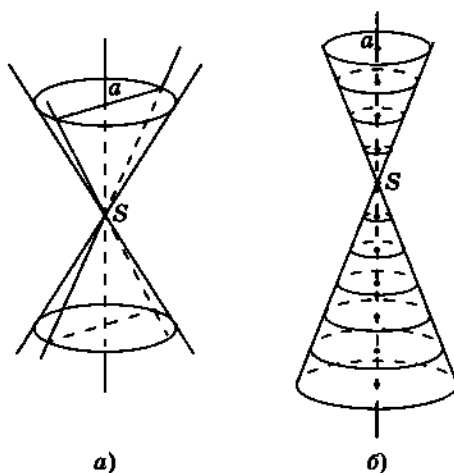


Рис. 256

ности вращения следует, что любая плоскость, не проходящая через вершину S и перпендикулярная оси вращения a , пересекает эту коническую поверхность по окружности (рис. 256, б).

Далее мы рассмотрим три принципиально различных возможных расположения секущей плоскости α по отношению к конической поверхности вращения.

а) Плоскость α пересекает все линейные образующие конической поверхности и не перпендикулярна оси вращения a (рис. 257). Докажем, что полученная при этом в сечении конической поверхности кривая l является эллипсом.

Проведем через ось a плоскость, перпендикулярную секущей плоскости α ; она пересекает поверхность по двум прямолинейным образующим. Будем считать полученные образующие лежащими в плоскости чертежа, а точки их пересечения с плоскостью α обозначим через R и T .

Впишем в угол, образованный этими образующими, две окружности, касающиеся прямой RT . Центры этих окружностей лежат на оси конической поверхности. Пусть одна из окружностей касается прямой

RT в точке F_1 и линейных образующих в точках P и Q , а вторая касается прямой RT в точке F_2 и линейных образующих — в точках P' и Q' . При вращении этих окружностей вокруг оси конической поверхности образуются две сферы (I и II), вписанные в эту коническую поверхность (в одну ее полость). Сфера I касается конической поверхности по окружности PQ , а сфера II — по окружности $P'Q'$, которые лежат в параллельных между собой и перпендикулярных оси вращения a плоскостях. Для обеих сфер плоскость α является общей касательной плоскостью с точками касания соответственно F_1 и F_2 .

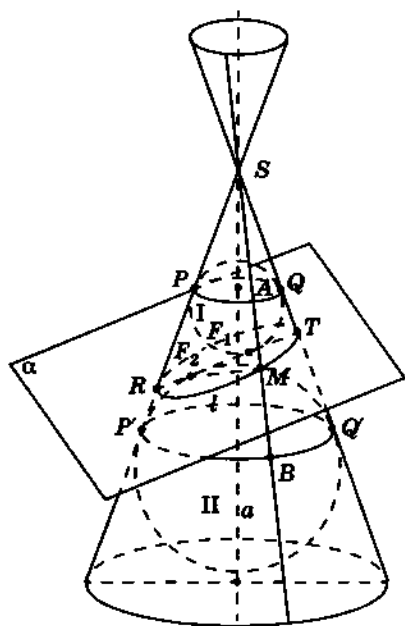


Рис. 257

Проведем теперь через любую точку M линии l прямолинейную образующую SM конической поверхности, и точки пересечения этой образующей с окружностями PQ и $P'Q'$ обозначим соответственно A и B . Далее соединим отрезками точку M с точками F_1 и F_2 . Тогда:

$|MA| = |MF_1|$ (как отрезки касательных прямых, проведенных из точки M к сфере I);

$|MB| = |MF_2|$ (как отрезки касательных прямых, проведенных из точки M к сфере II).

Получаем: $|MF_1| + |MF_2| = |MA| + |MB| = |AB|$.

Так как плоскости окружностей PQ и $P'Q'$ перпендикулярны оси вращения конической поверхности, то длина отрезка AB постоянна для любой линейной образующей, т. е. не зависит от выбора точки M на кривой l . Это означает, что для любой точки M линии l сумма расстояний $|MF_1|$ и $|MF_2|$ до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, откуда, в свою очередь, следует, что кривая l — эллипс, что и требовалось доказать. ▼

б) Рассмотрим теперь случай, когда плоскость α параллельна двум линейным образующим конической поверхности вращения.

В этом случае плоскость α пересекает обе полости конической поверхности (рис. 258), и в сечении получается линия l , состоящая, по-видимому, из двух ветвей. Интуитивно можно предположить, что этой линией окажется гипербола. Докажем, что это действительно так.

Как и в предыдущем случае, проведем через ось a плоскость, перпендикулярную секущей плоскости α ; она пересекает поверхность по двум прямолинейным образующим. Будем считать полученные образующие лежащими в плоскости чертежа.

Впишем в различные полости конической поверхности две сферы (обозначим их опять I и II) так, чтобы они касались секущей плоскости α в некоторых точках F_1 и F_2 . Пусть P и Q —

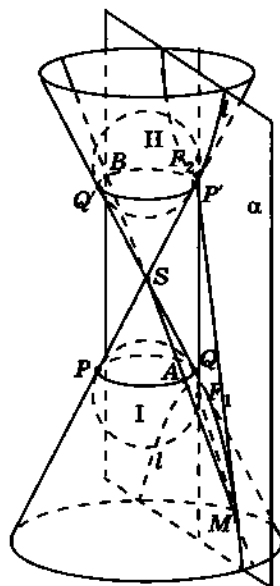


Рис. 258

точки касания сферы I с прямолинейными образующими, лежащими в плоскости чертежа, а P' и Q' — точки касания сферы II с этими образующими. Тогда сфера I касается конической поверхности по окружности PQ , а сфера II — по окружности $P'Q'$, которые лежат в параллельных между собой и перпендикулярных оси вращения a плоскостях.

Проведем теперь через любую точку M линии l прямолинейную образующую SM конической поверхности, и точки пересечения этой образующей с окружностями PQ и $P'Q'$ обозначим соответственно A и B . Соединив отрезками точку M с точками F_1 и F_2 , имеем:

$|MA| = |MF_1|$ (как отрезки касательных прямых, проведенных из точки M к сфере I);

$|MB| = |MF_2|$ (как отрезки касательных прямых, проведенных из точки M к сфере II).

Получаем:

$$\|MF_2\| - \|MF_1\| = \|MB\| - \|MA\| = \|AB\|.$$

Так как плоскости окружностей PQ и $P'Q'$ перпендикулярны оси вращения конической поверхности, то длина отрезка AB , расположенного на образующей конуса, постоянна для любой его образующей, т. е. не зависит от выбора точки M на линии l . Это означает, что для любой точки M линии l модуль разности расстояний $|MF_2|$ и $|MF_1|$ до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, следовательно, кривая l — гиперболоид, что и требовалось доказать. ▼

в) Рассмотрим третий случай, когда секущая плоскость α параллельна одной из образующих (обозначим ее SX) конической поверхности вращения (рис. 259). В этом случае плоскость α перпендикулярна плоскости, проходящей через образующую SX и ось a конуса, а линия l пересечения плоскости α и конической поверхности состоит из одной ветви, простирающейся в бесконечность. Покажем, что эта линия является параболой.

Впишем в коническую поверхность сферу, касающуюся плоскости α в некоторой точке F . Плоскость β окружности соприкосновения ω этой сферы и конической поверхности перпендикулярна оси a конуса и пересекает плоскость α по прямой KL .

Проведем через любую точку M линии l образующую конической поверхности и обозначим через P точку ее касания со сферой (точка P лежит на окружности ω). Тогда $|MF| = |MP|$ (как отрезки касательных к сфере, проведенных из точки M). Далее проведем плоскость δ через точку M параллельно плоскости β , в которой лежит окружность ω , и обозначим точки пересечения данной образующей SX с плоскостями

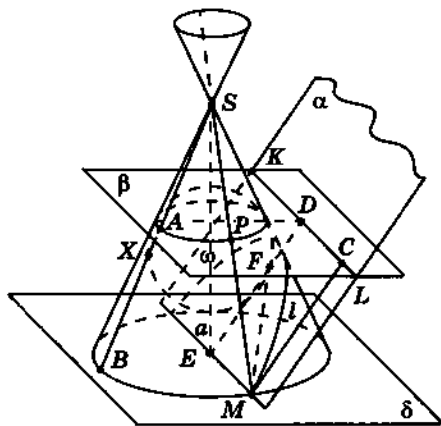


Рис. 259

β и δ соответственно A и B ($A = SX \cap \omega$). Тогда $|AB| = |MP|$ (как длины отрезков образующих конической поверхности, заключенных между плоскостями, перпендикулярными к оси этой поверхности). Плоскость, проходящая через образующую SX перпендикулярно плоскости α , пересекает эту плоскость по прямой DE , параллельной AB и перпендикулярной прямой KL . Причем $|DE| = |AB|$ (как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями). Если теперь провести в плоскости α перпендикуляр MC из точки M на прямую KL , то он будет параллелен и равен DE : $|MC| = |DE|$. Тогда получаем:

$$|MC| = |DE| = |AB| = |MP|.$$

Учитывая, что $|MF| = |MP|$, приходим к выводу: $|MF| = |MC|$. Из этого равенства следует, что точка M независимо от ее положения на линии l одинаково удалена от точки F и от прямой KL , следовательно, линия l является параболой, что и требовалось доказать. ▼

На рисунке 260 изображены все возможные виды плоских сечений конической поверхности.

Таким образом, изученные вами в планиметрии кривые второго порядка являются различными плоскими сечениями ко-

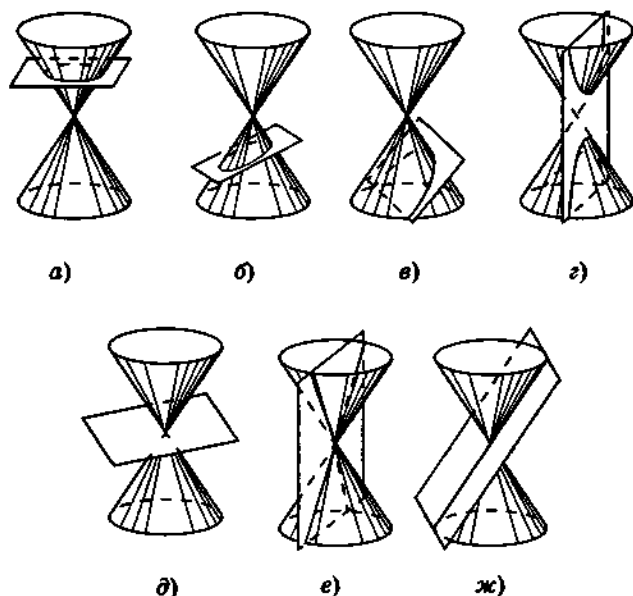


Рис. 260

нической поверхности вращения, поэтому их называют **коническими сечениями**, а для краткости — просто **кониками**. При этом окружность, эллипс, гиперболу и параболу называют **собственными** или **невырожденными коническими сечениями** (**невырожденными кониками**). Они обладают многими интересными и красивыми свойствами, о которых вы узнаете в высшей школе.

4. О векторном произведении двух векторов

Предпошлем определению векторного произведения двух векторов ряд необходимых в дальнейшем понятий.

Три некопланарных вектора будем называть **упорядоченной тройкой векторов**, если указано, какой из них является первым, какой — вторым и какой — третьим.

Записывая упорядоченную тройку векторов, мы будем располагать эти векторы в порядке их следования. Так, запись $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ означает, что первым элементом тройки является вектор $\vec{a}$, вторым — вектор $\vec{b}$ и третьим — вектор $\vec{c}$. Таким обра-

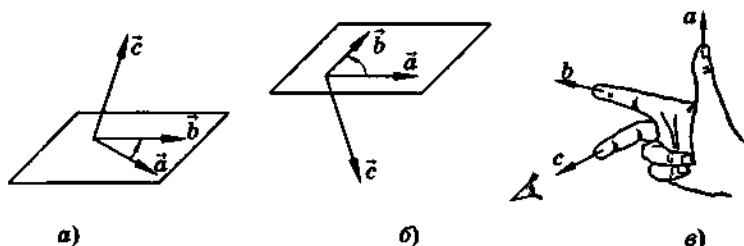


Рис. 261

зом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ — две различные упорядоченные тройки векторов.

В дальнейшем мы будем рассматривать только упорядоченные тройки векторов, поэтому слово «упорядоченная» будем опускать и говорить просто «тройка векторов».

Определение. Тройка некопланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется *правой*, если выполнено одно из следующих трех условий:

1. Если после приведения всех трех векторов к общему началу кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ мы видим из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки (рис. 261, а).

2. Если, находясь внутри трехгранного угла, определяемого приведенными к общему началу векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки (рис. 261, б).

3. Если, будучи приведенными к общему началу, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ располагаются так, как могут быть расположены большой ($\vec{a}$), указательный ($\vec{b}$) и средний ($\vec{c}$) пальцы правой руки (рис. 261, в).

Вы можете легко проверить эквивалентность условий один, два и три.

Если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, упомянутый в условиях 1 и 2, мы видим из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся по часовой стрелке (рис. 262, а, б), то тройка некопланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется *левой*; также тройка некопланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется *левой*, если, будучи приведенными к общему началу, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ располагаются так, как мо-

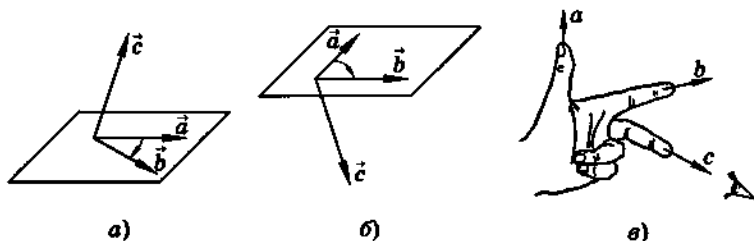


Рис. 262

гут быть расположены большой ($\vec{a}$), указательный ($\vec{b}$) и средний ($\vec{c}$) пальцы левой руки (рис. 262, в). Вы можете легко убедиться в эквивалентности всех трех определений левой тройки некопланарных векторов.

Заметим, что для компланарных векторов понятие правой (левой) тройки смысла не имеет.

Если две тройки векторов обе правые (обе левые), то говорят, что эти тройки имеют одинаковую ориентацию (тройки одной ориентации). Если же из двух троек векторов одна — правая, а другая — левая, то говорят, что эти тройки имеют противоположную ориентацию (тройки противоположной ориентации). Например, тройки векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ имеют одинаковую ориентацию, а тройки $\vec{c}\vec{b}\vec{a}$ и $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ — тройки противоположной ориентации (убедитесь в этом с помощью рисунка).

Из трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можно составить лишь следующие шесть троек: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, $\vec{c}\vec{b}\vec{a}$. Вы можете убедиться, что если первые три тройки правые, то остальные три тройки левые.

Заметим, что тройка векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартова прямоугольного базиса (ортонормированного репера) трехмерного векторного пространства является правой, если кратчайший поворот от $\vec{i}$ к $\vec{j}$ наблюдается из конца вектора $\vec{k}$ против часовой стрелки, и является левой, если кратчайший поворот от $\vec{i}$ к $\vec{j}$ наблюдается из конца вектора $\vec{k}$ по часовой стрелке. В нашем учебнике тройка векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ предполагается правой.

Теперь введем определение векторного произведения двух векторов.

Определение. Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{a} \times \vec{b}$ и определяемый следующими тремя условиями:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними, т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi; \quad (*)$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ является правой (рис. 263).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то по определению их векторное произведение полагают равным $\vec{0}$ (нуль-вектору).

Свойства векторного произведения

1. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах (рис. 264).

Справедливость этого утверждения основана на том, что площадь параллелограмма равна произведению длин его смежных сторон и синуса угла между ними, что, в свою очередь, следует непосредственно из условия (*): $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ в определении векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

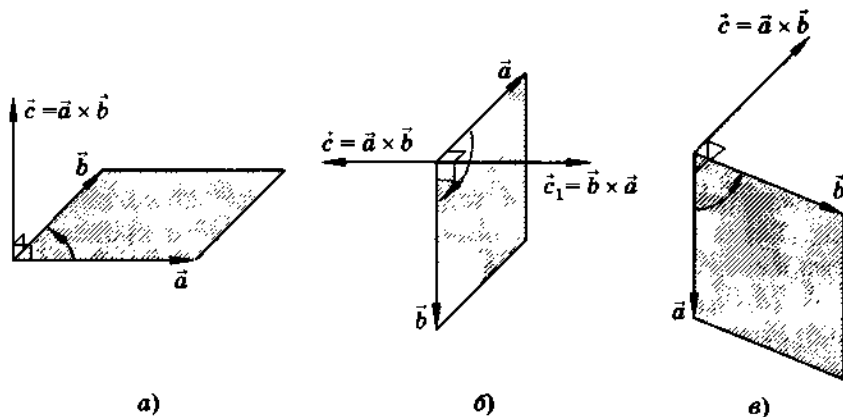


Рис. 263

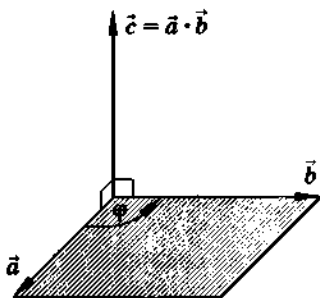


Рис. 264

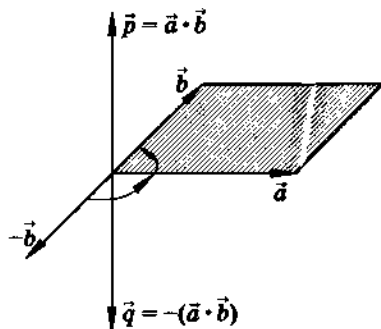


Рис. 265

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (свойство антиперестановочности сомножителей).

Для доказательства этого свойства обозначим: $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{b} \times \vec{a}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$ и свойство доказано. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны (рис. 265), то: 1) $|\vec{p}| = |\vec{q}|$; 2) векторы $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{b} \times \vec{a}$ коллинеарны, так как каждый из них перпендикулярен плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенными к общему началу. Тогда либо $\vec{p} = \vec{q}$, либо $\vec{p} = -\vec{q}$. Если бы имело место $\vec{p} = \vec{q}$, то обе тройки векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{p}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{p}$ были бы правыми, что невозможно, так как эти тройки противоположной ориентации. Значит, остается $\vec{p} = -\vec{q}$, а это означает: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, что и требовалось доказать. ▼

3. $(m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (сочетательное свойство относительно числового (скалярного) множителя).

Для доказательства этого свойства обозначим $\vec{p} = (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$ и $\vec{q} = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ и рассмотрим случаи.

а) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то вследствие коллинеарности векторов $m \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$, векторы $m \cdot \vec{a}$ и $\vec{b}$ также коллинеарны. Тогда на основании определения векторного произведения имеем: $(m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ и $m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$, т. е. $\vec{p} = (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{q}$.

б) Если $m = 0$, то $m \cdot \vec{a} = \vec{0}$ и тогда $\vec{p} = (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0} \times \vec{b} = \vec{0}$ (вектор $\vec{0}$ коллинеарен любому вектору). Обозначим $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, тогда $m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Опять получили: $\vec{p} = (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{q}$.

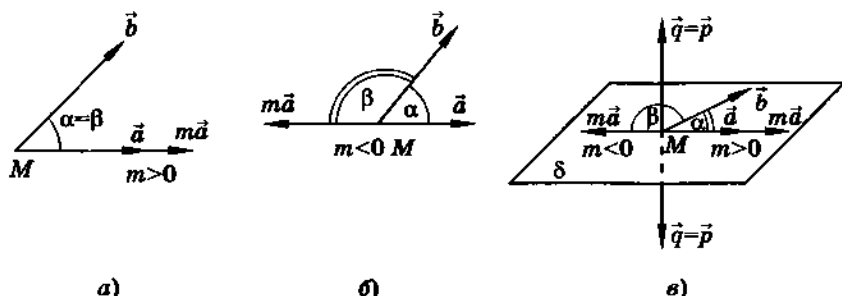


Рис. 266

в) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $m \neq 0$, то неколлинеарны и векторы $m\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначим: $\alpha = \angle(\vec{a}; \vec{b})$, $\beta = \angle(m\vec{a}; \vec{b})$. Тогда

$$|\vec{p}| = |m\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \beta = |m| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \beta; |\vec{q}| = |m| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = |m| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha.$$

Учитывая, что $\alpha = \beta$ при $m > 0$ (рис. 266, а) и $\alpha + \beta = \pi$ при $m < 0$ (рис. 266, б), приходим к выводу, что $\sin \beta = \sin \alpha$. Это означает, что и при $m > 0$, и при $m < 0$ длины векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равны.

Осталось доказать, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны и сонаправлены.

Коллинеарность этих векторов следует из того, что если вектор $\vec{q}$ перпендикулярен плоскости, которой компланарны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 266, в), то этот вектор перпендикулярен и плоскости, которой компланарны векторы $m\vec{a}$ и $\vec{b}$, так как $m\vec{a} \parallel \vec{a}$. Но этой плоскости перпендикулярен и вектор $\vec{p}$. Значит, $\vec{p} \parallel \vec{q}$.

И, наконец, докажем, что $\vec{p} \uparrow \vec{q}$. Если $m > 0$, то $m \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a}$, значит, $(\vec{a} \times \vec{b}) \uparrow (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$. А так как $m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \uparrow (\vec{a} \times \vec{b})$ при $m > 0$, то $m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \uparrow (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$, т. е. $\vec{p} \uparrow \vec{q}$. Если $m < 0$, то $m \cdot \vec{a} \downarrow \vec{a}$, значит, $(\vec{a} \times \vec{b}) \downarrow (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$. А так как $m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \downarrow (\vec{a} \times \vec{b})$ при $m < 0$, то $m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \uparrow (m \cdot \vec{a}) \times \vec{b}$, т. е. $\vec{p} \uparrow \vec{q}$.

Таким образом, и при $m > 0$, и при $m < 0$, имеем: $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ и $\vec{p} \uparrow \vec{q}$. Это означает: $\vec{p} = \vec{q}$, т. е. $(m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, что и требовалось доказать. ▼

4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (свойство распределительности векторного произведения относительно сложения векторов).

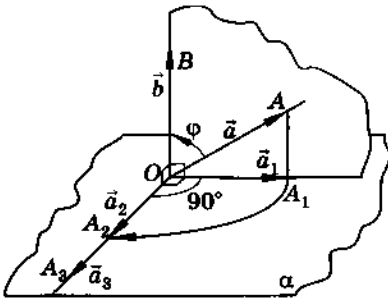


Рис. 267

Прежде чем доказывать это свойство векторного произведения векторов, рассмотрим следующий интересный и полезный в дальнейшем геометрический факт.

Пусть неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу O : $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \varphi$; α — плоскость, проходящая через точку O перпендикулярно вектору $\vec{b}$ (рис. 267).

Спроектируем ортогонально вектор $\vec{a}$ на плоскость α и полученный вектор $\vec{a}_1$ повернем в плоскости α вокруг точки O на угол 90° так, чтобы этот поворот наблюдался из конца вектора $\vec{b}$ происходящим по часовой стрелке. Получим вектор $\vec{a}_2$, для которого: а) $|\vec{a}_2| = |\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cdot \sin \varphi$; б) $\vec{a}_2 \perp \vec{a}$, $\vec{a}_2 \perp \vec{b}$; в) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}_2$ образуют правую тройку. Умножив, далее, вектор $\vec{a}_2$ на число, равное модулю вектора $\vec{b}$, получим такой вектор $\vec{a}_3$, что $|\vec{a}_3| = |\vec{a}_2| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$. Так как, кроме того, $\vec{a}_3 \uparrow \vec{a}_2$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{a}_3$ — правая тройка векторов и $\vec{a}_3 \perp \vec{a}$, $\vec{a}_3 \perp \vec{b}$. Это означает, что вектор $\vec{a}_3$ равен векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{a}_3 = \vec{a} \times \vec{b}$.

Докажем теперь свойство $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ векторного произведения векторов, для чего отложим векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OP} = \vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ от точки O и ортогонально спроектируем их на плоскость δ , перпендикулярную вектору $\vec{c}$. При этом параллелограмм $OAPB$ проектируется в такой параллелограмм $O_1A_1P_1B_1$ (рис. 268), что для векторов $\vec{a}_1 = \vec{OA}_1$, $\vec{b}_1 = \vec{OB}_1$, $\vec{p}_1 = \vec{OP}_1$, являющихся ортогональными проекциями соответственно векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, выполняется: $\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \vec{p}_1$ и $|\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cdot \sin \alpha$, $|\vec{b}_1| = |\vec{b}| \cdot \sin \beta$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}| \cdot \sin \gamma$, где $\alpha = \angle(\vec{a}; \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{b}; \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{p}; \vec{c})$.

Далее рассмотрим такой поворот пространства вокруг прямой O_1C на угол 90° , при котором индуцируемый в плоскости δ поворот вокруг точки O наблюдается из точки C совершающимся по часовой стрелке. Этот поворот отображает параллеле-

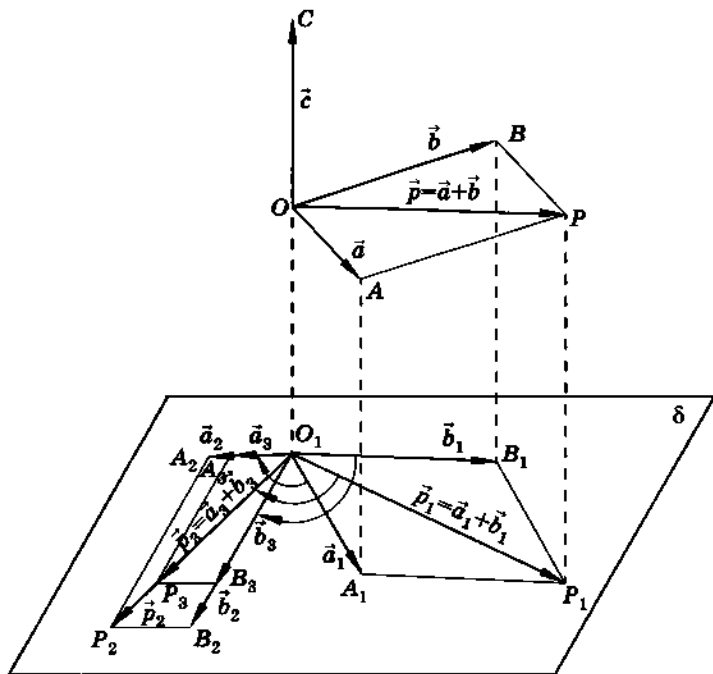


Рис. 268

лограмм $O_1A_1P_1B_1$ на параллелограмм $O_1A_2P_2B_2$, а каждый из векторов $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{p}_1$ — на перпендикулярный ему и равный по модулю соответственно вектор $\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{p}_2$. Умножив каждый из этих векторов на $|\vec{c}|$, получим соответственно такие векторы $\vec{a}_3 = \overrightarrow{O_1A_3}, \vec{b}_3 = \overrightarrow{O_1B_3}, \vec{p} = \overrightarrow{O_1P_3}$, что:

$$1) |\vec{a}_3| = |\vec{a}_2| \cdot |\vec{c}| = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{c}| = (|\vec{a}| \cdot \sin \alpha) \cdot |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \alpha;$$

аналогично, $|\vec{b}_3| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \beta; |\vec{p}_3| = |\vec{p}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \gamma;$

$$2) \vec{a}_3 \perp \vec{a}, \vec{a}_3 \perp \vec{c}; \vec{b}_3 \perp \vec{b}, \vec{b}_3 \perp \vec{c}; \vec{p}_3 \perp \vec{p}, \vec{p}_3 \perp \vec{c};$$

3) тройки векторов $\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}_3, \vec{b}, \vec{c}, \vec{b}_3$ и $\vec{p}, \vec{c}, \vec{p}_3$ правые.

Это означает, что $\vec{a}_3 = \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b}_3 = \vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{p}_3 = \vec{p} \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$.

Так как в параллелограмме $O_1A_3P_3B_3$ $\overrightarrow{O_1P_3} = \overrightarrow{O_1A_3} + \overrightarrow{O_1B_3}$, то получаем $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, что и требовалось доказать. ▽

5. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, так как любой вектор коллинеарен сам с собой.

Выражение векторного произведения в декартовых координатах

Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор, координаты которого нужно уметь находить, если известны координаты векторов сомножителей $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Предварительно найдем все возможные векторные произведения базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

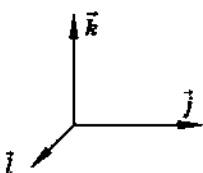


Рис. 269

Из определения векторного произведения, учитывая, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ попарно взаимно перпендикулярны (рис. 269) и являются единичными, имеем:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (**)$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}.$$

Теперь найдем координаты векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных в декартовом прямоугольном базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ своими координатами: $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ или в виде разложения по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Принимая во внимание свойства векторного произведения векторов, используя соотношения (**) и учитывая, что тройка базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ является правой, находим:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1x_2) \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ (x_1y_2) \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + (x_1z_2) \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + (y_1x_2) \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + (y_1y_2) \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ (y_1z_2) \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + (z_1x_2) \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + (z_1y_2) \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + (z_1z_2) \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= (x_1x_2) \cdot \vec{0} + (x_1y_2) \cdot \vec{k} + (x_1z_2) \cdot (-\vec{j}) + (y_1x_2) \cdot (-\vec{k}) + (y_1y_2) \cdot \vec{0} + \\ &+ (y_1z_2) \cdot \vec{i} + (z_1x_2) \cdot \vec{j} + (z_1y_2) \cdot (-\vec{i}) + (z_1z_2) \cdot \vec{0} = (y_1z_2 - y_2z_1) \cdot \vec{i} + \\ &+ (z_1x_2 - x_1z_2) \cdot \vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}(y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - x_1z_2; x_1y_2 - x_2y_1).$$

□□ Таблица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленная из четырех чисел a, b, c и d , называется **квадратной матрицей второго порядка**. Числа a, b, c и d называются **элементами матрицы**, при этом числа a и b называются элементами **первой строки**, числа c и d —

элементами *второй строки*; числа a и c — элементами *первого столбца*, числа b и d — элементами *второго столбца*; числа a и d — элементами *главной диагонали* определителя.

Определение. Число $a \cdot d - b \cdot c$ называется определителем (или детерминантом) матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и обозначается так: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Из определения видно, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ равен разности произведений чисел a и d главной диагонали и чисел b и c второй диагонали определителя, т. е. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$.

Например, $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) = -2$.

Тогда координатами $X = y_1 z_2 - y_2 z_1$, $Y = z_1 x_2 - x_1 z_2$, $Z = x_1 y_2 - x_2 y_1$ векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}(X; Y; Z)$ векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ являются определители второго порядка, составленные из координат векторов — сомножителей. Действительно,

$$X = y_1 z_2 - y_2 z_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; Y = z_1 x_2 - x_1 z_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix};$$

$$Z = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

или в виде разложения по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеем:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

■ **ЗАДАЧА.** Найдем, например, площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, как на сторонах.

Решение. Так как площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, равна модулю векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$, то найдем $|\vec{a} \times \vec{b}|$. Имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-5)) \cdot \vec{i} +$$

$$+ ((-5) \cdot 1 - 4 \cdot 2) \cdot \vec{j} + (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3) \cdot \vec{k} = 2\vec{i} - 13\vec{j} - 7\vec{k},$$

откуда $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-13)^2 + (-7)^2} = \sqrt{222}$. Значит, искомая площадь S параллелограмма равна $\sqrt{222}$. ■■

В высшей школе вы подробнее познакомитесь с векторным произведением и его приложениями в естественных науках. Кроме того вам расскажут и о смешанном произведении $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, его свойствах и приложениях.

Самостоятельно решите следующие задачи

1. Найдите площадь треугольника с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$. (Ответ: $\sqrt{24}$.)

2. На векторах $\vec{a}(4; 6; 2)$ и $\vec{b}(-2; 2; 4)$ построен треугольник. Найдите его площадь и высоты. (Ответ: $S = 18,75$; $h_1 =$
 $= h_2 = \frac{5\sqrt{42}}{7}$; $h_3 = 5\sqrt{2}$.)

3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$. (Ответ: 4.)

4. Дан треугольник ABC площади S . Докажите, что площадь треугольника, сторонами которого являются медианы данного треугольника, равна $\frac{3}{4}S$.

5. О различных ветвях геометрии

Более 2000 лет под геометрией подразумевалась лишь евклидова геометрия. Затем обнаружили, что для описания физического, реального пространства с не меньшим успехом могут служить другие геометрии.

Классическое определение геометрии гласит, что геометрия (греческое, от слов (в латинском алфавите) *ge* — земля и *metrein* — измерять) — это наука о пространстве, точнее — нау-

ка о формах, размерах и границах тех частей пространства, которые в нем занимают действительные тела.

Однако современная геометрия многими своими ветвями выходит далеко за пределы такого ее определения. При этом развитие геометрии привело, в свою очередь, к развитию понятия о пространстве: пространство как математический термин широко употребляется современными геометрами (и не только геометрами), и уже не может служить первичным понятием, на котором строится определение геометрии, а, напротив, в ходе развития современной математики становится понятием определяемым (например, векторное пространство, метрическое пространство, топологическое пространство, пространство всех многочленов степени не выше n).

В настоящее время различают геометрии: элементарную, аналитическую, дифференциальную, проективную, начертательную, алгебраическую, топологию и т. д. Кроме того, геометрия может быть евклидовой и неевклидовой. О некоторых из этих частей современной геометрии, которые мы будем называть ее *ветвями*, и пойдет наш дальнейший разговор.

В нашем учебнике не представляется необходимым изложение материала, изучаемого в различных ветвях геометрии. Мы дадим лишь краткий обзор развития и становления некоторых из названных ветвей геометрии и попробуем в доступном виде дать представление о том, что этими науками изучается. Со многими из них вы в той или иной форме встретитесь в высшей школе.

В 1872 г. в Эрлангенском университете (Германия) великий немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925) в своей лекции, вошедшей в историю развития математики под названием «Эрлангенская программа», высказал единый подход к определению той или иной геометрии (геометрической системы) с позиции группы преобразований: предметом любой геометрии является изучение свойств геометрических фигур, сохраняющихся при преобразованиях определенного вида.

Итак, ветви геометрии.

5.1. Об элементарной геометрии

В разделе «Симметрии правильных многогранников» данного учебника говорится, что множество всех движений евклидова пространства образует группу — группу движений. Мы знаем,

что основным инвариантом движений является расстояние между точками: при любом движении любая фигура отображается на равную ей фигуру. Те свойства фигуры, которые сохраняются при движениях, называют *евклидовыми свойствами* этой фигуры. Иначе говоря, равные фигуры обладают одинаковыми евклидовыми свойствами.

Предметом элементарной («школьной») геометрии является изучение евклидовых свойств фигур, т. е. тех их свойств, которые сохраняются при различных движениях, а также тех свойств, которые сохраняются при подобных преобразованиях евклидова пространства. Эту геометрию и называют *евклидовой* или *элементарной геометрией* (хотя она весьма и весьма не элементарна!).

Евклидову (элементарную) геометрию можно определить и с аксиоматической точки зрения. Первым источником, содержащим изложение аксиоматического построения элементарной геометрии, являлись «Начала» древнегреческого математика Евклида (конец IV — начало III в. до н. э.), имя которого и носит элементарная геометрия. Полную же, независимую и непротиворечивую систему аксиом евклидовой геометрии изложил великий немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) в своей книге «GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE» (Leipzig und Berlin, 1930); ее русский перевод — «ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ» вышел в свет в 1948 г. в Москве. Эта система аксиом изложена в разделе «Об аксиоматическом построении геометрии» в конце нашего учебника.

Существуют и другие аксиоматические построения евклидовой геометрии.

Но до аксиоматического построения элементарной геометрии (система аксиом Гильберта) и до групповой точки зрения (теория Клейна) на предмет геометрии (в том числе и на элементарную геометрию) происходило многовековое накопление геометрического материала.

Родиной геометрии считают обыкновенно Вавилон и Египет. При этом развитие математических знаний арифметики и геометрии в странах древнего мира было вызвано нуждами земледелия, ремесел, строительства, торговли, мореплавания и военного дела.

Но в Древнем Египте геометрические познания оставались достоянием замкнутой касты жрецов. Зачатки геометрических знаний египтяне передали грекам.

В период от VI до III в. до н. э. в Греции установилась элементарная геометрия — научная теория, созданная человечеством. Это важнейшее событие оказало огромное влияние на прогресс математики и всего точного естествознания. Появление геометрии в Греции можно отнести уже к концу VII в. до н. э. и связать с именем Фалеса Милетского (639—548 гг. до н. э.).

Известно, что Фалес в молодости много путешествовал по Египту, общался с египетскими жрецами и многому научился, в том числе и геометрии. Возвратившись на родину, Фалес поселился в Милете. Здесь он посвятил себя занятиям наукой, и, окруженный своими учениками, создал так называемую Ионийскую школу. Фалесу принадлежат первые доказательства утверждений о том, что: вертикальные углы равны; вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой. Фалесу были известны некоторые из теорем о параллельных прямых (теорема Фалеса и др.). Греческий философ Прокл (ок. 410—485 гг. до н. э.) приписывает Фалесу теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

Наряду с накоплением геометрического материала, наиболее важным для Ионийской школы является изменение характера геометрических исследований. Ионийская школа, возглавляемая Фалесом, в условиях быстро развивающейся архитектуры, мореплавания, гражданской и военной техники, в условиях развертывающихся исследований в области астрономии, физики, механики, требовавших точных измерений, придала геометрии теоретический характер и сделала ее предметом исследования, в котором наряду с интуицией видную роль начинает играть и абстрактная логика.

Большое развитие элементарная геометрия получила в древнегреческой школе, основанной Пифагором Самосским (564—473 гг. до н. э.). В этой школе геометрия превращается в абстрактную науку: систематически исследуются все свойства изучаемых фигур, а не только те, которые были необходимы для практических целей; используются все следствия, вытекающие из теоремы Пифагора, в частности, свойства катетов прямоугольного треугольника и перпендикуляра, опу-



Пифагор Самосский
(564—473 гг. до н. э.)

щенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Ученые пифагорейской школы установили, что диагональ квадрата со стороной, равной единице, не может быть выражена каким бы то ни было рациональным числом. Оказалось, что существуют «несоизмеримые отрезки».

В дальнейшем абстрактно-логический характер развития элементарной геометрии наблюдается у Платона (422—347 гг. до н. э.) и его ученика Аристотеля (384—322 гг. до н. э.), и в Александрийской школе находит свое завершение. Была создана наука, широкая по замыслу, богатая фактическим материалом и, несмотря на абстрактный характер, дающая ряд чрезвычайно важных практических применений. Более того, можно сказать, что именно в абстрактной структуре, которую получила геометрия в трудах греческих ученых с VI по III в. до н. э., и коренится возможность ее многообразного конкретного использования. В результате самое слово «геометрия» начинает терять свое первоначальное значение — измерение земли: уже Аристотель для измерения земли ввел новый термин — геодезия.

В Древней Греции еще в V в. до н. э. была известна следующая «делосская» легенда. Однажды на острове Делос возникла эпидемия чумы. Оракул возвестил жителям острова, что они избавятся от чумы, если вместо кубического жертвенника, посвященного Аполлону, построят новый кубический жертвенник, но по объему вдвое больший старого. Для решения этой задачи требовалось с помощью только циркуля и линейки построить (найти) ребро нового куба. Однако математики древности, естественно, не могли найти решения этой задачи, вошедшей в историю как задача об удвоении куба. Ее неразрешимость с помощью только циркуля и линейки была доказана значительно позднее.

Математики древности также не могли найти решения задачи о трисекции угла, в которой с помощью только циркуля и линейки требуется разделить на три равные части произвольный плоский угол. Неразрешимость этой задачи с помощью только циркуля и линейки была доказана также значительно позднее.



Платон
(422—347 гг. до н. э.)

К неразрешимым относится и задача о квадратуре круга. Эта знаменитая задача была известна древним грекам и заключается в том, чтобы с помощью только циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу.

В трудах греческих ученых — Фалеса, Пифагора, Платона, Демокрита, Аристотеля, Евдокса Книдского, Менехма и др. устанавливается и систематизируется накопленный фактический материал классической (элементарной) геометрии.

Уже около IV в. до н. э. начали появляться сочинения, цель которых состояла в систематизации накопленного к тому времени элементарно-геометрического материала. Ни одно из этих сочинений до нас не дошло: все они были забыты после появления замечательного пособия по геометрии — «Начала» Евклида (конец IV — начало III в. до н. э.), служившего в течение двух тысячелетий учебником, по которому обучались геометрии все: юные и взрослые. «Начала» Евклида — образец греческой научной геометрии — написаны в III в. до н. э. и состоят из 13 книг.

Евклид жил в Александрии в эпоху, когда там образовался наиболее крупный центр греческой научной мысли. Опираясь на труды своих предшественников, Евклид создал глубоко продуманную систему изложения материала, которой руководствовались при обучении элементарной геометрии в течение почти двух тысячелетий.

Изложение геометрии Евклид начинает с определения основных геометрических объектов (понятий): точка, прямая, плоскость. Затем он вводит аксиомы и постулаты — основные предложения, принимаемые без доказательства, после чего следуют теоремы плоской и пространственной геометрии (планиметрии и стереометрии), в которых формулируются различные свойства плоских и пространственных фигур (многоугольников, окружности и круга, прямых и плоскостей в пространстве, многогранников, сферы, конуса, цилиндра и др.). При этом каждая теорема доказывается на основании введенных ранее определений, аксиом (постулатов) и также ранее установленных и доказанных теорем. Эта форма логической



Евклид
(422—347 гг. до н. э.)

последовательности умозаключений позднее была названа *дедуктивным методом* изложения геометрии. Такой метод позволяет с полной достоверностью обнаруживать новые геометрические факты.

«Начала» Евклида до нашего времени (с некоторым уточнением основных понятий и аксиом) составляют основу элементарной («школьной») евклидовой геометрии, как мы ее понимаем в настоящее время.

После «Начал» Евклида греческая математика получила дальнейшее развитие в работах величайшего математика и механика Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.) и Аполлония (конец III — начало II в. до н. э.).

В сочинении «О шаре и цилиндре» Архимед впервые опубликовал полученные им следующие результаты: площадь поверхности шара равна четырехкратной площади его большого круга; объем цилиндра, описанного около шара, в 1,5 раза больше объема этого шара; площадь полной поверхности этого цилиндра также в 1,5 раза больше площади поверхности вписанного в него шара. Ученый очень гордился этими открытиями и, согласно завещанию, на могильной плите был изображен цилиндр с вписанным в него шаром, а в надписи на плите говорилось, что объемы этих тел относятся как 3 : 2.

Аполлоний глубоко исследовал конические сечения — кривые, которые представляют собой различные плоские сечения конической поверхности вращения.

Одним из основных положений элементарной геометрии является следующее: свойства геометрических фигур не зависят от их положения в пространстве. Геометрические свойства фигур, изучаемые в элементарной геометрии, не зависят также и от размеров этих фигур, так как все соотношения, например, между сторонами данного треугольника, будут сохраняться, если его подвергнуть подобному преобразованию. Поэтому мы можем сказать, что в элементарной геометрии или, точнее, в метрической геометрии, изучаются те свойства фигур, которые остаются неизменными при всех движениях этих фигур в пространстве, а также при всех подобных преобразованиях евклидова пространства. Именно такой вывод



Архимед
(ок. 287—212 гг.
до н. э.)

о предмете элементарной геометрии и следует, исходя из «Эрлангенской программы» Ф. Клейна.

«Начала» Евклида были основой и для замечательного школьного учебника «Геометрия» Андрея Петровича Киселева (1852—1940), служащего для обучения российских школьников с конца XIX в. и до наших дней.

Большой вклад в изучение элементарной геометрии в современной России внесли А. Д. Александров, Л. С. Атанасян, В. Г. Болтянский, А. Н. Колмогоров, А. В. Погорелов, З. А. Скопец, И. М. Яглом и многие другие.

Особо мы хотим выделить учебники и задачки И. Ф. Шарыгина, отличающиеся красотой и самобытностью изложения материала и замечательными задачами.

5.2. Об аналитической геометрии

Аналитическая геометрия является той ветвью геометрии, в которой геометрические фигуры «изображаются» на основе метода координат средствами алгебры — алгебраическими уравнениями или неравенствами.

Метод построения геометрии у Евклида позже характеризовали словами «*geometriam geometricè*» — строить геометрию исключительно геометрическими средствами. Такой метод построения геометрии называется *синтетическим*, а геометрию, построенную синтетическим методом, называют *синтетической геометрией*.

Предметом геометрии является изучение свойств геометрических фигур. А геометрическая фигура может состоять из одной точки или нескольких точек, может представлять собой линию, поверхность или тело. Древние греки уже изучали окружность, эллипс, гиперболу и параболу как сечения конической поверхности вращения различными плоскостями (см. «Элементарная геометрия»). Теория конических сечений Аполлония Пергского (III в. до н. э.), предвосхитившая идеи аналитической геометрии, и поныне является одной из важнейших тем аналитической геометрии.

Но математики того периода не знали, что эти линии являются кривыми второго порядка: *они и не могли этого знать, так как не было ни совершенной буквенной символики, ни метода координат*. По той же причине, будучи знакомы со сферической, цилиндрической и конической поверхностями,

с такими поверхностями вращения, как эллипсоид, параболоид и гиперболоиды, они не могли знать, что все эти поверхности также являются поверхностями второго порядка.

Свойства этих кривых и поверхностей исследовались синтетическим методом. Основным препятствием дальнейшего развития геометрии было отсутствие общих методов геометрического исследования.

К кривым и поверхностям математическая наука вернулась только в XVII в., заменив синтетический метод исследования их свойств на метод, основанный на применениях алгебры, метода анализа и метода координат, поэтому геометрию стали называть *аналитической геометрией*, хотя ее можно было бы назвать и *координатной геометрией*.

Отцами аналитической геометрии были французские ученые — философ, физик и математик Рене Декарт (1596—1650) и математик Пьер де Ферма (1601—1665).

Рене Декарт происходил из знатного рода. Непоседливый по натуре, он поступил в армию, много путешествовал по Западной Европе, побывал в Италии, в то время прославившейся научными исследованиями Галилео Галилея (1564—1642) и его учеников.

В 1628 г. Декарт переехал в Голландию. Большой заслугой Декарта было введение в математику переменной величины, создание более удачной символики, установление тесной связи алгебры с геометрией.

В 1649 г. Декарт выехал в Швецию по приглашению шведской королевы Христины. В 1650 г. он заболел опасной формой воспаления легких и умер.

Пьер де Ферма родился в большом родовом имении на юге Франции, возле Тулузы. Детство он провел с родителями, а учиться поехал в Тулузу. Получив юридическое образование, он вскоре зачисляется советником Тулузского парламента. Ферма писал отличные стихи на французском, итальянском, латинском и испанском языках. Свободное от работы время Ферма заполнял чтением математических трудов, занятиями математикой: он был не просто любителем, он обладал выдаю-



Рене Декарт
(1596—1650)

щимся творческим даром, огромной силой мысли и образованностью, поэтому наиболее крупные математики-современники охотно с ним переписывались. Свои математические исследования Ферма излагал на отдельных листах или на полях математических книг, а также в переписке с друзьями. Всю свою жизнь он провел в Тулузе, где и скончался.

Пользуясь буквенной символикой, введенной французским ученым Франсуа Виетом (1540—1603), Декарт и Ферма одновременно и независимо друг от друга дали науке новый метод — метод координат, лежащий в основе созданной ими в XVII в. аналитической геометрии. Идеи, выдвинутые гениальными французскими математиками, привели к новому и широкому расцвету геометрической мысли. Эти идеи были изложены Ферма в сочинении «Введение в учение о геометрических местах на плоскости и в пространстве» (опубликовано в 1679 г., после смерти автора); взгляды Декарта изложены в небольшом его сочинении «Геометрия» (1637) в качестве приложения к сочинению «Рассуждение о методе».

И Ферма, и Декарт изучали труды Аполлония, но установленный ими метод, вошедший под названием *аналитической геометрии*, существенно отличается от приемов Аполлония. В аналитической геометрии исследование свойств геометрических фигур ведется с помощью уравнений и неравенств; в основе аналитической геометрии лежит метод координат.

Декарту и Ферма принадлежит идея координации точек плоскости относительно произвольно выбранных координатных осей, т. е. предлагается метод, согласно которому становится возможным выразить в виде уравнений те соотношения, которыми обладают лишь точки, принадлежащие данной геометрической фигуре. При этом Ферма дал систематическую сводку уравнений важнейших кривых. Декарт же шире и глубже обосновывает идеи и значение метода координат. У Декарта речь идет только о координации точек плоскости (в «положительной» четверти). Первое систематическое изложение аналитической геометрии дал Л. Эйлер во втором томе своего «Введения в анализ бесконечных» (1748).



Пьер де Ферма
(1601—1665)

Сущность метода координат на плоскости состоит в том, что положение любой точки плоскости определяется пересечением двух семейств координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, образующих координатную сеть: через любую точку плоскости проходит одна и только одна координатная линия $u = \text{const}$ и одна и только одна координатная линия $v = \text{const}$, причем каждая линия $u = \text{const}$ пересекается с любой линией $v = \text{const}$ только в одной точке. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек M евклидовой плоскости и множеством всех упорядоченных пар $(x; y)$ действительных чисел x и y , при этом говорят, что на плоскости задана система координат. Числа x и y , которые ставятся в соответствие точке M , называют ее *координатами в данной системе координат и записывают: $M(x; y)$* . (Отображение множества всех точек евклидовой плоскости на множество всех упорядоченных пар действительных чисел называют *действительной арифметизацией плоскости*.)

В зависимости от целей и объектов исследования используют различные системы координат, посредством каждой из которых однозначно определяется положение любой точки на данной плоскости.

Если линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ — прямые, то координаты называют *прямолинейными*; если одна из линий семейств $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ или обе линии — кривые, то координаты называют *криволинейными*.

Простейшими прямолинейными координатами точки на плоскости являются известные вам ее декартовы прямоугольные координаты: координатные линии $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ взаимно перпендикулярны, единица измерения по осям координат Ox и Oy (нулевым координатным линиям) одна и та же. При этом уравнение $f(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки M данной фигуры и не

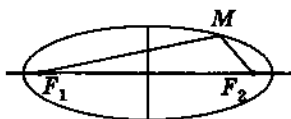


Рис. 270

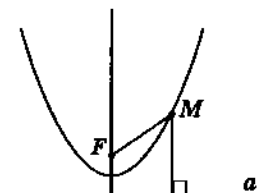


Рис. 271

удовлетворяют координаты любой точки, ей не принадлежащей, называют уравнением этой фигуры в данной системе координат.

Мы знаем, например, что *эллипсом* называется множество всех точек M плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 той же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами (рис. 270).

Если декартову прямоугольную систему координат Oxy выбрать так, чтобы ось Ox проходила через F_1 и F_2 , ось Oy — через середину отрезка F_1F_2 , и обозначить: $F_1F_2 = 2c$, $MF_1 + MF_2 = 2a$, где $M(x; y)$ — любая точка эллипса, то в этой системе координат эллипс задается **каноническим уравнением**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (где a и b — длины полуосей эллипса).

По уравнению эллипса мы можем исследовать его свойства.

Аналогично, при специальным образом выбранной системе декартовых прямоугольных координат парабола (рис. 271) может быть задана уравнением $y^2 = 2px$ (где p — расстояние между фокусом и директрисой), а гипербола (рис. 272) — уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Об этом можно прочитать в разделе «О поверхностях второго порядка» в конце нашего учебника.)

Если же оси координат Ox и Oy не перпендикулярны и единичные отрезки на них имеют различные длины, то такая система координат называется *аффинной* (или *общей декартовой*), а координаты точки — *аффинными координатами*.

Примером криволинейных координат точки на плоскости могут служить ее **полярные координаты**. Положение любой точки M плоскости можно определить расстоянием p от точки M до фиксированной точки O — *полюса* и величиной угла φ , на который нужно повернуть вокруг этого полюса *полярную ось* — один из лучей с началом O , выбранных в качестве начального, — до совмещения ее с лучом OM

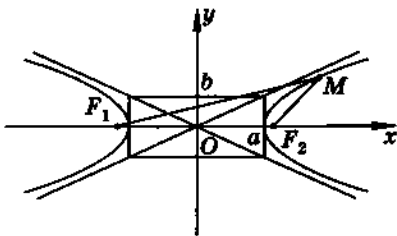


Рис. 272

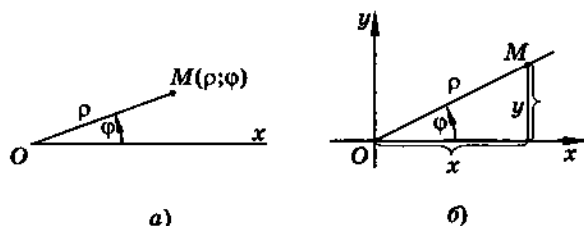


Рис. 273

(рис. 273, а). Упорядоченную пару чисел $(\rho; \varphi)$ называют **полярными координатами** точки M и записывают: $M(\rho; \varphi)$. Число ρ называют **полярным радиусом** точки M , а φ — **полярным углом**; при этом обычно рассматривают $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Связь между полярными координатами точки $M(\rho; \varphi)$ и ее декартовыми координатами $(x; y)$ выражается формулами: $x = \rho \cdot \cos \varphi$; $y = \rho \cdot \sin \varphi$ (рис. 273, б).

Полярные координаты часто используются в математике, физике, астрономии и других науках для изучения различных спиралей, кривых второго порядка (полюс помещают в фокусе кривой, а в качестве полярной оси можно принять ось симметрии кривой) и т. д.

Аналогично осуществляется арифметизация евклидова пространства путем установления взаимно-однозначного соответствия между множеством всех точек M евклидова пространства и множеством всех упорядоченных троек $(x; y; z)$ действительных чисел x , y и z , которые **называются координатами** точки M ; при этом если точка M имеет координаты $(x; y; z)$, то пишут: $M(x; y; z)$.

Простейшими прямолинейными координатами точек в пространстве являются известные вам **декартовы прямоугольные координаты**, порождаемые заданием в пространстве декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$: в данном случае координатными поверхностями $x = \text{const}$; $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$ являются три семейства плоскостей: каждое из семейств состоит из всех попарно параллельных плоскостей и каждая плоскость любого из этих семейств перпендикулярна любой плоскости двух других семейств, при этом каждые три плоскости, выбранные по одной из каждого семейства, пересекаются в единственной точке.

плоскости, выбранные по одной из каждого семейства, пересекаются в единственной точке.

О канонических уравнениях эллипсоида, параболоида, гиперболоидов, а также конической и цилиндрических поверхностях в декартовой прямоугольной системе координат речь идет в разделе «Поверхности второго порядка» в конце нашего учебника.

Если же оси координат Ox , Oy и Oz попарно взаимно не перпендикулярны и единичные отрезки на них имеют различные длины, то такая система координат $Oxyz$ называется *аффинной* (или *общей декартовой*).

Примером не прямолинейных координат точки M в пространстве являются ее **сферические координаты**. Введем эти координаты и найдем их связь с декартовыми прямоугольными координатами.

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и $OM = R$ — расстояние от точки M до начала координат. Обозначим: $\theta = \angle MOZ$ — угол между радиус-вектором OM точки M и положительным направлением оси Oz (рис. 274), $\varphi = \angle XON$ — угол между положительным направлением оси Ox и лучом ON , где N — ортогональная проекция точки M на плоскость Oxy . Тогда упорядоченную тройку чисел $(R; \theta; \varphi)$ называют **сферическими координатами точки M** . (Одной из координатных поверхностей, проходящих через точку M , является сфера с центром O и радиусом R , поэтому координаты точки M называются **сферическими**.)

Если точка M в декартовой прямоугольной системе $Oxyz$ имеет координаты $(x; y; z)$, то связь между этими координатами точки M и ее сферическими координатами $(R; \theta; \varphi)$ выражается формулами:

$$x = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = R \cdot \cos \theta.$$

Другим примером не прямолинейных координат точки M в пространстве являются ее **цилиндрические координаты**.

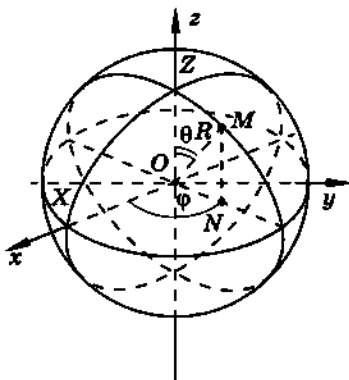


Рис. 274

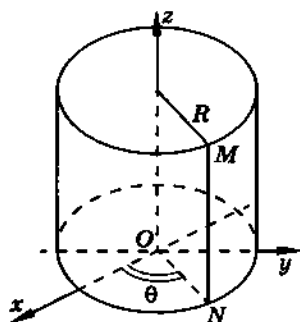


Рис. 275

натной оси Oz . Тогда одной из координатных поверхностей ($R = \text{const}$), проходящих через точку M , является цилиндрическая поверхность вращения с осью Oz и радиуса R (поэтому координаты точки M называются *цилиндрическими*). Если при этом θ — угол, который плоскость, проходящая через точку M и координатную ось Oz , образует с координатной плоскостью Oxz , то цилиндрическими координатами точки M является упорядоченная тройка чисел $(R; \theta; Z)$, где $|Z|$ —

расстояние от точки M до плоскости Oxy (рис. 275).

Связь между декартовыми координатами $(x; y; z)$ точки M и ее цилиндрическими координатами $(R; \theta; Z)$ выражается формулами:

$$x = R \cdot \cos \theta; y = R \cdot \sin \theta; z = Z.$$

С открытием метода координат геометрия обогатилась мощным аппаратом алгебраического анализа, с применением которого стало возможным просто и быстро решать такие задачи, которые синтетическим методом или вообще не решались, или решались посредством громоздких и трудно выполняемых построений. Аналитический метод становится доминирующим методом решения сложных геометрических задач.

К примеру, совершенно не очевидное линейчатое строение однополостного гиперболоида легко доказано средствами аналитической геометрии в разделе «Поверхности второго порядка» в конце нашего учебника.

В последней четверти XIX в. аналитическая геометрия начала изучать теории геометрических преобразований и инвариантов. Эта геометрия имела большое значение для развития дифференциальной и проективной геометрий, аналитической механики и других разделов математики и физики. Она и в настоящее время необходима для изучения различных разделов математических и естественно-научных дисциплин. При этом получила значительное развитие многомерная аналитическая геометрия.

Развитие пространственной аналитической геометрии в большой мере связано с именем великого математика, физика

и астронома Леонарда Эйлера (1707—1783), который был действительным членом Российской академии наук. Вопросам аналитической геометрии Эйлер посвятил второй том «Введения в анализ бесконечно малых» (1748), который по праву считается первым курсом аналитической геометрии в современном смысле.

Большой вклад в изучение аналитической геометрии в России внесли П. С. Александров, Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, Н. С. Бахвалов, В. Н. Делоне, В. А. Дубровин, К. И. Дуничев, Н. В. Ефимов, А. М. Лопшиц, П. С. Моденов, Н. И. Мусхелишвили, С. П. Новиков, А. В. Погорелов, М. М. Постников, Д. А. Райков, А. Т. Фоменко и многие другие.

5.3. О дифференциальной геометрии

В элементарной геометрии синтетическим методом изучаются только такие кривые, как окружность, эллипс, парабола и гипербола, а из поверхностей — сфера, цилиндр и конус, эллипсоид, параболоид и гиперболоиды. При этом каждая кривая или поверхность изучается глобально, «в целом».

В аналитической геометрии упомянутые выше кривые и поверхности изучаются уже средствами алгебры и анализа по их уравнениям; причем эти кривые и поверхности вновь изучаются «в целом».

Дифференциальной геометрией называют ту ветвь геометрии, в которой изучаются любые плоские и пространственные кривые и поверхности методом математического анализа, с помощью дифференциальных уравнений. Важнейшая же особенность дифференциальной геометрии состоит в том, что она, имея уравнение кривой или поверхности, изучает эту кривую «локально», «присматриваясь» (методом бесконечно малых) к сколь угодно малой части кривой или поверхности, т. е. изучает свойства кривых и поверхностей «в малом», в данной их точке и в сколь угодно малой ее окрестности.

Руководящая идея этих исследований заключалась в том, что относительно каждого явления в бесконечно малой области действуют упрощенные законы, которые, с одной стороны, значительно легче вскрываются, а с другой стороны, играют определяющее значение для исследуемого явления в целом. Такой метод изучения позволяет, например, определить направление кривой в данной ее точке направлением соответ-

вующей касательной прямой, а длину малой дуги кривой — длиной отрезка касательной и т. д. Если же удастся обнаружить некоторое дифференциально-геометрическое свойство кривой в ее любой точке, то делается обобщение для данной кривой. Аналогичным методом в дифференциальной геометрии пользуются и при изучении поверхностей.

В середине XVII в. математиков, физиков и астрономов интересовал вопрос о проведении касательной к любой известной в то время кривой. Вопрос о проведении касательной к кривой имеет важное значение не только в геометрии, но и в приложениях ее в механике — вдоль касательной всегда направлен вектор скорости движения материальной точки по криволинейной траектории. Вскоре родилось дифференциальное исчисление, а позднее вопрос о касательной к кривой стал «первым словом» новой области математики — дифференциальной геометрии.

В дальнейшем плоскую кривую мы будем представлять в виде «гладкой» линии. На интуитивном уровне, наглядно это означает, что в каждой точке M этой линии можно провести единственную касательную прямую, которая при движении точки вдоль кривой будет «вращаться», переходя из одного положения в другое без скачков: скачок может получиться при изломе линии.

Одним из основных понятий дифференциальной геометрии плоских кривых является понятие «кривизны линии» в данной точке M : под кривизной линии в точке M понимается величина, характеризующая степень искривления линии в этой точке или степень отклонения линии от прямой в некоторой окрестности точки M (говорят о пологой или крутой траектории движущейся точки). Кривизну линии в данной точке, обозначаемую обычно k , можно еще охарактеризовать как

скорость изменения направления касательной в данной точке при движении этой точки по кривой (рис. 276). Величину, обратную кривизне, называют *радиусом кривизны* и обозначают ρ , т. е.

$$k = \frac{1}{\rho}.$$

На наглядном уровне, грубо говоря, ρ есть радиус окружности, «достаточно малая» дуга которой совпадает с «достаточно малой» дугой данной кривой

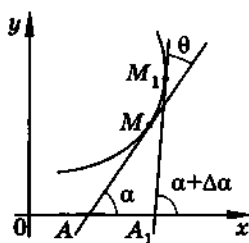


Рис. 276

в окрестности данной точки A . Эта окружность как бы является предельным положением окружности, пересекающей данную кривую в точках B , A и C , при стремлении точек B и C по кривой к точке A .

Вдоль линии кривизна обычно изменяется. Постоянную кривизну имеет только окружность (если не считать прямую, кривизна которой равна нулю). Радиус кривизны окружности в каждой ее точке равен ее радиусу R , т. е. $\rho = R$, тогда для окружности в любой ее точке получаем: $k = \frac{1}{R}$. Значит, чем больше радиус окружности, тем меньше ее кривизна. Это действительно так: с увеличением радиуса окружности ее дуги становятся более пологими.

Кривая, не лежащая целиком в одной плоскости, называется пространственной кривой. Кривизну гладкой пространственной кривой в данной точке определяют, как и кривизну плоской кривой.

Пусть теперь B и C — две точки пространственной кривой m , расположенные по разные стороны от ее точки A , и α — плоскость, проходящая через точки A , B и C . Представим себе, что точки B и C неограниченно приближаются по кривой к точке A . При каждом изменении положений точек B и C будет менять свое положение по отношению к кривой и плоскость α . *Соприкасающейся плоскостью к кривой в точке A* называют плоскость, занимающую предельное положение переменной плоскости α при неограниченном приближении точек B и C к точке A . Таким образом, соприкасающаяся плоскость наиболее тесно примыкает к этой кривой в окрестности точки A : она имеет с кривой три общие, совпавшие точки (соприкасается кривой).

Соприкасающейся плоскостью плоской кривой является плоскость, в которой эта кривая расположена.

Кручение кривой (κ — каппа) является второй важной характеристикой пространственной кривой. На наглядном уровне можно сказать, что кручение кривой в точке M показывает, как быстро эта кривая «отходит» от соприкасающейся плоскости, проходящей через эту точку (рис. 277). (Кручение плоской кривой равно нулю в каждой ее точке.)

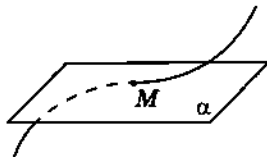


Рис. 277

Большой интерес для дифференциальной геометрии представляет изучение различных свойств поверхностей.

Эйлер, один из создателей аналитической геометрии, впервые применил понятие кривизны и к поверхностям, изложив соответствующие результаты в работе «О кривизне поверхности» (1767).

Мы знаем, что сферическая поверхность обладает тем свойством, что в каждой ее точке можно провести единственную касательную плоскость. В дифференциальной геометрии поверхности, обладающие таким свойством, называют *гладкими поверхностями* (такowymi являются, например, сфера, эллипсоид, параболоид вращения).

Искривление гладкой поверхности в какой-либо ее точке M можно рассматривать как степень ее отклонения от касательной плоскости в этой точке (рис. 278). Это отклонение может оказаться различным для различных направлений на поверхности.

Пусть Φ — гладкая поверхность, M — ее любая точка, α — плоскость, касательная к поверхности Φ в точке M (рис. 279). **Нормалью к поверхности в точке M** называется прямая m , проходящая через точку M перпендикулярно касательной плоскости α в этой точке. **Нормальным сечением поверхности Φ в точке M** называется линия пересечения поверхности Φ с плоскостью, проходящей через нормаль m к этой поверхности.

Прямая t называется касательной к поверхности Φ в точке M , если она касается нормального сечения поверхности в этой точке. Оказывается, что касательные прямые

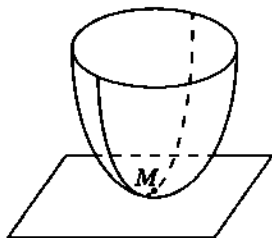


Рис. 278

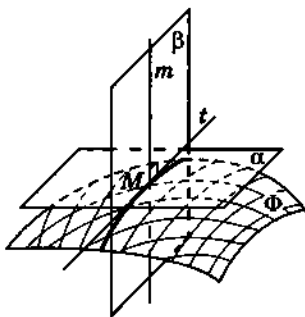


Рис. 279

ко всем нормальным сечениям поверхности Φ в точке M лежат в касательной плоскости α .

Будем вращать вокруг нормали проходящую через нее плоскость, в результате чего получим всевозможные нормальные сечения поверхности Φ в точке M . Любое из нормальных сечений является плоской кривой, характеризующейся своей кривизной в этой точке. Кривизна сечения считается положительной, если его вогнутость направлена в сторону ориентированной нормали, и отрицательной — в противном случае. Так на рисунке 280 кривизна линии MA положительна, а линии MB — отрицательна (эти кривые «загнуты» в разные стороны).

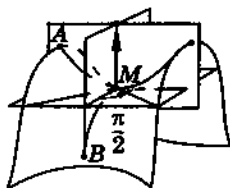


Рис. 280

Оказывается, в каждой точке поверхности одно из всех нормальных сечений имеет наименьшую кривизну k_1 и одно — наибольшую кривизну k_2 . Эти сечения называют *главными сечениями поверхности* в точке M , направления касательных к этим сечениям — *главными направлениями кривизны*, а их кривизны k_1 и k_2 — *главными кривизнами поверхности* в точке M . Эйлер установил, что главные направления кривизны поверхности в любой ее точке взаимно перпендикулярны, а кривизна k_n любого нормального сечения выражается через главные кривизны формулой:

$$k_n = k_1 \cdot \cos^2 \varphi + k_2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол, образованный рассматриваемым нормальным сечением и сечением с кривизной k_1 . (Приведенная формула называется *формулой Эйлера о кривизнах*.)

Новое направление исследования по теории поверхностей дал Карл Фридрих Гаусс (1777—1855). Своей работой «Общие исследования относительно кривых поверхностей» (1827) он положил начало новой, так называемой «внутренней геометрии» поверхностей.

Гаусс охарактеризовал кривизну поверхности в любой ее точке одним числом $k = k_1 \cdot k_2$, равным произведению главных кривизн данной поверхности в этой точке. Это произведение называется *полной* или *гауссовой кривизной* поверхности в данной точке.

При этом, если k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, то полная кривизна k положительна, а точка поверхности называется

эллиптической. Это происходит тогда, когда главные сечения «загнуты» в одну сторону, и поверхность является выпуклой. Примером всюду выпуклой поверхности, но с различной в различных точках полной кривизной, может служить эллипсоид, а с постоянной полной кривизной — сфера.

Если же k_1 и k_2 имеют противоположные знаки, то полная кривизна k отрицательна, а точка поверхности называется *гиперболической*. Это происходит тогда, когда главные сечения «загнуты» в разные стороны и поверхность является седловидной (рис. 280). Примером седловидной поверхности может служить гиперболический параболоид (рис. 281).

Если $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$, то полная кривизна k равна нулю, а точка поверхности называется *параболической*; данная поверхность имеет вблизи этой точки цилиндрическую форму (рис. 282). Это происходит тогда, когда одно из главных сечений является прямой. Примером поверхности с гауссовой кривизной, равной нулю, может служить цилиндр, конус.

В разделах «Поверхности второго порядка» и «Аналитическая геометрия» мы вели разговор о *линейчатых поверхностях*, образованных движением прямой. В дифференциальной геометрии выделяют особый вид линейчатых поверхностей — *развертывающиеся поверхности*. Чтобы представить себе поверхность такого вида, остановимся на понятии *изгибания поверхности*.

Возьмем лист бумаги и изобразим на нем треугольник. Свернем этот лист бумаги в форме цилиндрической поверхности, а затем — в форме конической поверхности. В таком случае говорят, что мы деформируем плоский лист бумаги в цилиндрическую поверхность, а цилиндрическую поверхность —

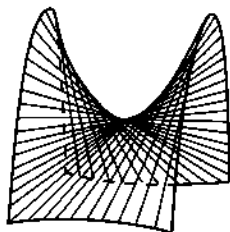


Рис. 281

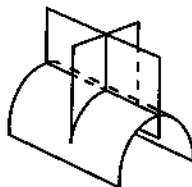


Рис. 282

в коническую. Прямолинейный треугольник, построенный на плоском листе бумаги, при этой деформации превратится на цилиндрической (рис. 283) (и конической) поверхности в *криволинейный* треугольник, но длины соответственных сторон этих треугольников равны, т. е. длина отрезка (дуги) при рассматриваемой деформации сохраняется.

Изгибание поверхности — это такая ее деформация, при которой остается неизменной длина дуги любой линии, изображенной на этой поверхности.

Развертывающаяся поверхность — это такая линейчатая поверхность, которая может быть наложена на плоскость посредством изгибания. В дифференциальной геометрии доказывается, что поверхности нулевой гауссовой кривизны (к ним относятся цилиндр, конус) все налагаются на плоскость, т. е. все являются развертывающимися поверхностями (вспомните развертки конуса и цилиндра). Их геометрия подчиняется одним и тем же законам.

Свойство цилиндрической поверхности «развертываться на плоскости» может быть использовано при нахождении расстояний между точками, лежащими на цилиндрической поверхности, двигаясь по этой поверхности.

■ ЗАДАЧА. Дан цилиндр высотой 6 и радиусом основания 3. Отрезки AB и A_1B_1 являются параллельными диаметрами его оснований. Точка K лежит на дуге AB основания и делит ее в отношении 1 : 2, считая от точки A (рис. 284). Найдите длину кратчайшего пути из точки K в точку B_1 по поверхности цилиндра.

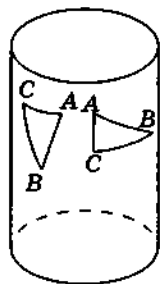
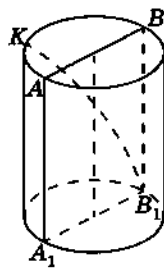
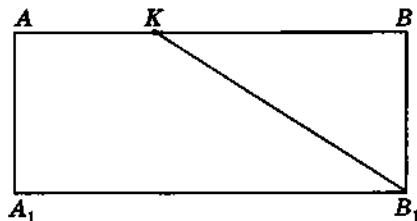


Рис. 283



а)



б)

Рис. 284

Решение. Развернем на плоскость боковую поверхность полуцилиндра, содержащего кратчайший «путь» из точки K в точку B_1 . При этом дуга KB_1 кривой линии на поверхности цилиндра, являющаяся кратчайшим путем из точки K в точку B_1 по поверхности цилиндра, «развернется» в отрезок KB_1 прямой линии на плоскости (см. рис. 281, б).

Так как $AB = 3\pi$ и $AK : KB = 1 : 2$, то $KB = 2\pi$. Тогда в прямоугольном треугольнике KBB_1 находим $KB_1 = \sqrt{KB^2 + BB_1^2} =$
 $= \sqrt{4\pi^2 + 36} = 2\sqrt{\pi^2 + 9}.$

Ответ: $2\sqrt{\pi^2 + 9}.$

В противоположность цилиндрической поверхности «развертываться на плоскости», кусок эллиптической поверхности, например кусок сферы, имеющей положительную гауссову кривизну, никаким изгибанием нельзя наложить на плоскость; это свидетельствует о том, что геометрия евклидовой плоскости и сферическая геометрия «живут» по различным законам.

Гаусс доказал теорему о том, что при изгибании поверхности полная кривизна в каждой ее точке остается инвариантной (это утверждение Гаусс назвал «замечательной теоремой»).

Таким образом, при изгибании любой поверхности остаются инвариантными длины отрезков кривых на ней, площади ее фигур, полная кривизна в каждой ее точке. Все эти и другие свойства поверхности, не изменяющиеся при ее изгибании, были названы внутренними свойствами поверхности. Эти свойства связаны с самой структурой поверхности и не зависят от положения поверхности в пространстве.

Заметим, кстати, что именно изучая внутренние свойства поверхностей, Гаусс обнаружил определенные неудобства применения декартовых прямоугольных координат, и впервые широко применил и развил метод криволинейных координат.

Особое значение в геометрии имеют поверхности постоянной гауссовой кривизны или, короче, поверхности постоянной кривизны. Суть состоит в том, что произвольную замкнутую фигуру, изображенную на эллипсоиде, невозможно пере-

двинуть в другое на этом эллипсоиде место без складок и разрывов фигуры, так как эллипсоид не является поверхностью постоянной кривизны.

Но произвольную замкнутую фигуру, изображенную на сфере, являющейся поверхностью постоянной положительной кривизны, мы можем передвигать по этой сфере без какой-либо деформации.

Другой поверхностью постоянной, но отрицательной кривизны, является псевдосфера (рис. 285). Итальянский геометр Эудженио Бельтрами (1835—1900) первый заметил связь между внутренней геометрией поверхностей постоянной отрицательной кривизны и геометрией Лобачевского. В 1868 г. в своей статье «Опыт истолкования неевклидовой геометрии» Бельтрами вычислил линейный элемент плоскости Лобачевского и установил, что гауссова кривизна этой плоскости во всех ее точках одинакова и равна $-\frac{1}{R^2}$, т. е. что эта кривизна

постоянна и отрицательна. *Поверхности постоянной отрицательной кривизны Бельтрами назвал псевдосферами.* Они бывают различных типов (рис. 285—287).

После краткого обзора понятий, которыми оперирует дифференциальная геометрия при изучении кривых и поверхностей, мы так же кратко остановимся на творческой деятельности основоположников этой ветви геометрии.

Начальные сведения по дифференциальной геометрии появились с возникновением анализа. Но самостоятельное зна-

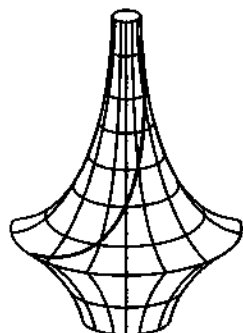


Рис. 285



Рис. 286



Рис. 287

чение эта ветвь геометрии начала приобретать лишь в середине XVIII в. благодаря работам Эйлера. Именно Эйлер получил первые существенные результаты по теории поверхностей и, в частности, установил перпендикулярность двух главных нормальных сечений поверхности.

Работы Эйлера оказали большое влияние на дальнейшее развитие дифференциальной геометрии, главным образом, осуществляемое в школе геометрии, основанной в Меньере (Франция) Гаспаром Монжем (1746—1818), членом Парижской академии наук и одним из основателей начертательной геометрии.

Леонард Эйлер родился в 1707 г. в Швейцарии, но уже в двадцатилетнем возрасте, в 1727 г., прибыл в Россию и начал работать в Петербургской Академии наук адъюнктом. В России Эйлер работал в 1727—1741 гг. и в 1766—1783 гг., с 1733 г. он был действительным членом Российской Академии наук.

Деятельность Эйлера в академии продолжалась 31 год. Жизнь его замечательна неустанным, поистине титаническим трудом. Он является автором около 900 работ. В 1753 г., вследствие переутомления, он теряет зрение в правом глазу и при этом замечает, «что теперь меньше будет отвлекаться от занятий математикой». Титанический труд «оставляет свой жестокий след»: в 1771 г. Эйлер полностью теряет зрение. Именно с этого времени до самой смерти (1783) он продиктовал почти половину всех своих работ.

Эйлер является создателем первой русской математической школы. Он приложил много усилий для разработки интегрального исчисления, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии; им разрабатывались вопросы прикладной математики. И нынешние студенты вузов постоянно встречаются с различными «методами Эйлера» и «формулами Эйлера».

Знаменитый французский математик конца XVIII в. и начала XIX в. Пьер Симон Лаплас говорил: «Читайте, читайте Эйлера, он учитель нас всех».



Леонард Эйлер
(1707—1783)

Гаспар Монж, «геометр и якобинец», родился в 1746 г. Он был сыном мелкого торговца и внуком крестьянина. Гаспар в юности проявил блестящие способности и начал свою творческую работу в области геометрии. В 22-летнем возрасте он стал профессором математики Военно-инженерной школы в Меньере.

Первая его работа по дифференциальной геометрии — *«Мемуар о развертках, радиусах кривизны и...»* (1785) была посвящена теории пространственных кривых. Важнейший труд Монжа *«Приложение анализа к геометрии»* (1807) представляет первое систематическое изложение теории поверхностей, где устанавливается взаимная связь между дифференциальными уравнениями и геометрическими кривыми и поверхностями. Следует отметить, что для исследования поверхностей Монж применяет не только аппарат аналитической и дифференциальной геометрий, а использует также конструктивные и графические методы образования этих поверхностей.

В период французской революции Монж был сенатором и морским министром. Когда наступил период реставрации монархии во Франции, Монж, как республиканец, был изгнан из Политехнической школы и Академии наук и лишен всех прав. Умер Монж в 1818 г.

Как уже говорилось выше, новое направление исследования по теории поверхностей дал Гаусс.

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в городе Брауншвейге в семье фонтанных дел мастера и садовника. С двух лет Карл поражал окружающих своим умом, и по настоянию матери он в возрасте семи лет поступил в народную школу, где было обращено внимание на блестящие математические способности мальчика. Увлеченные математикой помощник учителя математики 17-летний М. Ф. Бартельс (Бартельс Иоганн Мартин Христиан (в России Мартин Федорович)) и 10-летний Карл подружились,



Гаспар Монж
(1746—1818)



Карл Фридрих Гаусс
(1777—1855)

и эта дружба продолжалась до смерти Бартельса в 1836 г. Старший друг ввел Гаусса в тайны алгебры и в значительной степени способствовал его математическому образованию.

Обратите внимание! Работая с 1808 г. в Казанском университете, теперь уже профессор, Бартельс у себя на дому занимался с юным Лобачевским! (См. очерк «Неевклидова геометрия Лобачевского» в конце этого учебника.) Удивительное переплетение судеб трех создателей неевклидовой геометрии: Лобачевского с Гауссом — через Бартельса, а Яноша Больяи с Гауссом — через своего отца — Фаркаша Больяи, который обучался в Геттингенском университете одновременно с Гауссом и обменивался с ним в письмах своими соображениями о «проблеме пятого постулата».

В 1788 г. Карл Гаусс поступает в гимназию, а в 1791 г. — в Карлово училище в Брауншвейге, в котором обучался 3 года. В это время он изучил ряд работ Ньютона, Эйлера, Лагранжа.

В 1795 г. Гаусс поступил в знаменитый Геттингенский университет, который он окончил в 1798 г., после чего стал доцентом в Брауншвейге. В 1799 г. Гаусс получил степень доктора за диссертацию, посвященную основной теореме алгебры.

В 30-летнем возрасте он получил кафедру математики и астрономии в Геттингенском университете и одновременно занял должность директора Геттингенской астрономической обсерватории. Все эти обязанности Гаусс исполнял в течение 48 лет, до своей смерти в 1855 г.

В 1827 г. была опубликована геометрическая работа Гаусса «Общие исследования относительно кривых поверхностей». Эта работа Гаусса явилась ценнейшим вкладом в дифференциальную геометрию: в теории поверхностей Гаусса содержится понятие о полной кривизне и о ее инвариантности при изгибании поверхности.

В черновых записках Гаусса было обнаружено упоминание о поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны. (Впоследствии эту поверхность стали называть *псевдосферой*; Э. Вельтрами показал, что на псевдосфере выполняется геометрия Лобачевского.) Эта записка и многие другие, найденные после смерти Гаусса в его архивах, свидетельствуют о том, что «короля математики» интересовали вопросы, связанные с «проблемой пятого постулата». Более того, он понимал, что если допустить, что сумма углов треугольника меньше 180° , то это приводит к построению геометрии, отличной от евклидовой, т. е.

он понимал существование двух различных геометрий — евклидовой и неевклидовой. Но публично выступить в защиту существования неевклидовой геометрии он не решился. Почему? Однозначного ответа на этот вопрос никто не может дать и сегодня.

Гаусса по справедливости ставят в один ряд с выдающимися математиками мира: Архимедом, Ньютоном, Эйлером.

Огромный вклад в развитие и изучение дифференциальной геометрии в России внесли труды представителей Ленинградской геометрической школы, созданной академиком Российской Академии наук А. Д. Александровым.

Александр Данилович Александров (1912—1999) родился в с. Волянь Рязанской губернии. По окончании Ленинградского (ныне Санкт-Петербургского) университета работал там же. В 1952—1964 г. — ректор ЛГУ; член-корреспондент АН СССР (1946), академик АН СССР (1964). С 1964 г. — в Сибирском отделении АН СССР.

Основные достижения А. Д. Александрова относятся к геометрии, где он открыл методы изучения метрических свойств фигур, породившие новый объект исследования — нерегулярные метрические многообразия, более общие, нежели римановы пространства. Эти методы существенно расширили область геометрических исследований и привели, в работах А. Д. Александрова и созданной им школы, к решению ряда классических проблем теории поверхностей, а также нашли важные применения в теории дифференциальных уравнений и теории упругих оболочек. Александру Даниловичу принадлежат также исследования по основаниям теории относительности и философии.

А. Д. Александров — крупнейший геометр XX века. За большой вклад в развитие и изучение дифференциальной геометрии академик А. Д. Александров удостоен высоких правительственных наград и почетных званий. Он лауреат международной премии им. Н. И. Лобачевского, государственной премии СССР. Им написаны многочисленные монографии и учебники по геометрии для высшей школы, известные учебники для средних школ, выдержавшие большое количество изданий.

Александр Данилович скончался 27 июня 1999 года.



**Александр
Данилович
Александров**
(1912—2000)

Велик вклад, который внес в развитие и изучение дифференциальной геометрии в России ученик А. Д. Александрова академик Российской АН и АН Украины, педагог, ученый с мировой известностью Алексей Васильевич Погорелов (1919—2002).

Вся творческая деятельность А. П. Погорелова является ярким примером беззаветного служения большой науке и ее незыблемому фундаменту — Геометрии. Вместе со своим учителем, академиком А. Д. Александровым, им было глубоко развито одно из ведущих направлений в теоретической и прикладной геометрии — «Геометрия в целом». Им также разработаны общая геометрическая теория дифференциальных уравнений в частных производных и геометрическая теория устойчивости тонких упругих оболочек.

А. П. Погореловым написаны многочисленные монографии, комплекты учебников по геометрии для высшей школы, известные учебники для средних школ, выдержавшие большое количество изданий в последнее двадцатилетие.

Алексей Васильевич скончался 17 декабря 2002 года.

Большой вклад в развитие и изучение дифференциальной геометрии в России внесли также Б. А. Дубровин, Н. В. Ефимов, В. Ф. Каган, Г. Ф. Лаптев, Б. Л. Лаптев, С. П. Новиков, А. П. Норден, Э. Г. Позняк, П. К. Рапшевский, Б. А. Розенфельд, С. П. Фиников, А. Т. Фоменко, П. А. Широков, Р. Н. Щербаков и многие другие.

5.4. О проективной геометрии

В природе тела имеют рельеф, у живописца же — плоскость холста или стены, и живописец должен на плоской поверхности показать тело рельефным. Художник достигает этой цели посредством перспективы.

Именно руководствуясь законами перспективы, гениальный итальянский художник и мыслитель Леонардо да Винчи (1452—1519) создавал в течение 1495—1497 гг. знаменитую фреску «Тайная вечеря». Леонардо сформулировал основные идеи перспективы, определил ее значение для практики живо-



Алексей
Васильевич
Погорелов
(1919—2002)

писца, архитектора, инженера и оставил примеры гениального применения этих идей не только в «Тайной вечере».

«Мы знаем, что точка зрения помещается в глазу зрителя сюжета» — этой фразой начинается у Леонардо его теория перспективы. Представим себе, что между глазом и предметом установлена плоская прозрачная пластина. Каждый луч, направленный от видимой точки предмета к глазу, пересекает пластину в некоторой точке. Множество всех таких точек пересечения есть изображение данного предмета на пластине. Процесс получения этого изображения называют *центральным проектированием*, а полученное изображение предмета — его *центральной проекцией*. Такой «проекцией» в принципе и должно быть изображение на любой плоскости — холсте, бумаге или стене.

Вернемся к «Тайной вечере». Каждой видимой художнику точке помещения, где происходило изображенное событие, на картине соответствует определенная точка, а каждому отрезку прямой (край стола, стороны окон и т. д.) — также отрезок прямой. Однако при этом равные отрезки не всегда изображаются на картине равными же отрезками, изменяются и вели-

Леонардо
да Винчи
(1452—1519)

и некоторых углов. Наконец, самое важное: в комнате линии пересечения стен и потолка были параллельны, а на изображении соответствующие линии изображены пересекающимися в одной точке.

Однако потребовалось триста лет от первых шагов создания теории перспективы до того момента, когда эта теория оформилась в специальные науки — проективную и начертательную геометрии.

Первым, кто заложил основы начертательной и проективной геометрии, был выдающийся французский архитектор и математик **Жирар Дезарг** (1591—1661).

Жирар Дезарг родился в Лионе в семье нотариуса. Талантливый инженер, строитель фортификационных укреплений, архитектор, он основательно изучил теорию изображений и, в частности, перспективу. В своем знаменитом труде «Черновой набросок попытки разобраться в том, что получается при пересечении конуса плоскостью» (1639) и в других работах Дезарг выдвинул основные предложения проективной геометрии: он, рассматривая различные взаимные положения конической поверхности вращения и плоскости, пересекающей эту поверхность, объясняет, что центральной проекцией окружности на плоскость может быть либо окружность, либо эллипс, либо парабола, либо гипербола.

Кроме того, Дезарг впервые ввел понятия «бесконечно удаленной точки», «бесконечно удаленной прямой» и «бесконечно удаленной плоскости».

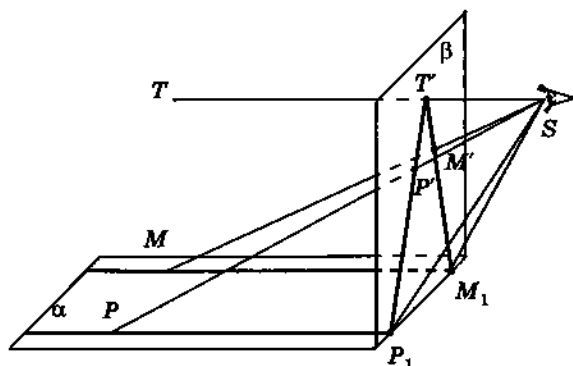


Рис. 288

Как уже говорилось о перспективе при рассмотрении картины «Тайная вечеря», Леонардо да Винчи некоторые параллельные прямые изображает необычным для того времени образом — прямыми, имеющими точку пересечения. Дезарг в «Черновом наброске» предлагает считать эту точку пересечения изображением (проекцией) «бесконечно удаленной» точки, в которой «пересекаются» изображаемые параллельные прямые. На рисунке 288 точка T' плоскости β соответствует «бесконечно удаленной» точке T плоскости α , в которой «пересекаются» параллельные прямые M_1M и P_1P .

Говоря современным языком, Дезарг «расширяет» евклидово пространство, дополняя его новыми элементами — «несобственными (бесконечно удаленными) точками» — так, что: а) каждая прямая евклидова пространства дополняется одной «несобственной точкой», при этом все параллельные между собой прямые пространства дополняются одной и той же «несобственной точкой»; б) каждая плоскость евклидова пространства дополняется одной «несобственной прямой» (т. е. все «несобственные точки» «расширенной» евклидовой плоскости образуют «несобственную прямую» этой плоскости), при этом все параллельные между собой плоскости евклидова пространства дополняются одной и той же «несобственной прямой»; в) все евклидово пространство дополняется одной «несобственной плоскостью», которая представляет собой объединение «всех несобственных точек» расширенного пространства. Более того, Дезарг предлагает считать «несобствен-

ные точки» равноправными со всеми остальными точками пространства.

Дополненное «несобственными» элементами (точками, прямыми и плоскостью) евклидово пространство называют *проективным пространством* или *евклидовым пространством, расширенным до проективного*. Геометрия этого пространства носит название *проективной геометрии*. (Название «проективная» подчеркивает, что эта геометрия возникла при изучении операции проектирования.) А так как в проективном пространстве собственные и «несобственные» элементы равноправны, то и термины «собственный» и «несобственный» становятся ненужными, а поэтому в рассуждениях опускаются. Это приводит к тому, что в проективной геометрии отсутствует понятие «параллельный».

В проективном пространстве: две любые прямые либо пересекаются (*лежат в одной плоскости*), либо скрещиваются; две любые плоскости пересекаются; любая плоскость пересекается с любой не лежащей в ней прямой.

Заметим, что проективная прямая существенно отличается от евклидовой прямой: подобно окружности, проективная прямая является замкнутой линией; ни одна из точек проективной прямой не делит ее на два луча; две точки A и B разбивают проективную прямую на два отрезка с концами в этих точках, один из которых содержит несобственную точку данной прямой; на проективной прямой (*в силу ее замкнутости*) понятие «лежать между» для трех точек A , B и C не имеет смысла.

Существенно отличается от евклидовой плоскости и проективная плоскость: две любые прямые проективной плоскости пересекаются; любая прямая проективной плоскости не делит ее на две полуплоскости; любые две прямые проективной плоскости делят ее лишь на две части.

В силу равноправия собственных и несобственных элементов в проективном пространстве, любую прямую проективной плоскости можно принять в качестве ее несобственной прямой. Пусть, например, прямая a является несобственной прямой проективной плоскости (рис. 289, a). Тогда прямые m и n , пересекающиеся в несобственной точке $A \in a$, являются (с проективной точки зрения) параллельными прямыми. Более того, с проективной точки зрения четырехугольник $ABCD$ —

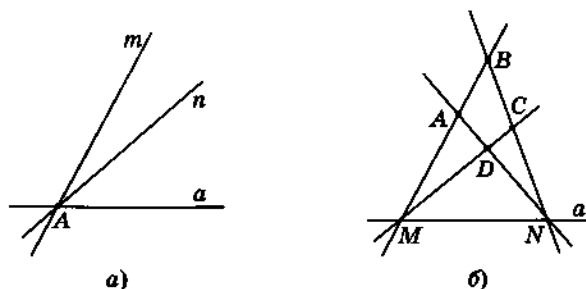


Рис. 289

параллелограмм (рис. 289, б), так как пары AB и CD , BC и AD его противоположных сторон параллельны: они пересекаются в несобственных точках M и N соответственно.

Дезарг сформулировал и доказал целый ряд теорем, которые являются фундаментальными теоремами проективной геометрии. Среди них прямая и обратная теоремы, носящие его имя.

Теорема Дезарга (теорема о перспективных треугольниках). Если три прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 , соединяющие соответственные вершины двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, проходят через одну точку, то три точки пересечения пар соответственных сторон AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 этих треугольников принадлежат одной прямой (рис. 290).

Точка S , через которую проходят три прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 , называется *дезарговой точкой* (или *точкой Дезарга*), а прямая p , на которой лежат точки пересечения пар соответственных сторон AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 , называется *дезарговой прямой*.

Обратная теорема Дезарга. Если три точки пересечения пар соответственных сторон AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ принадлежат одной прямой, то три прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 , соединяющие соответственные вершины этих треугольников, проходят через одну точку (рис. 290).

Обе теоремы справедливы как в случае, когда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в одной плоскости (рис. 290, а), так

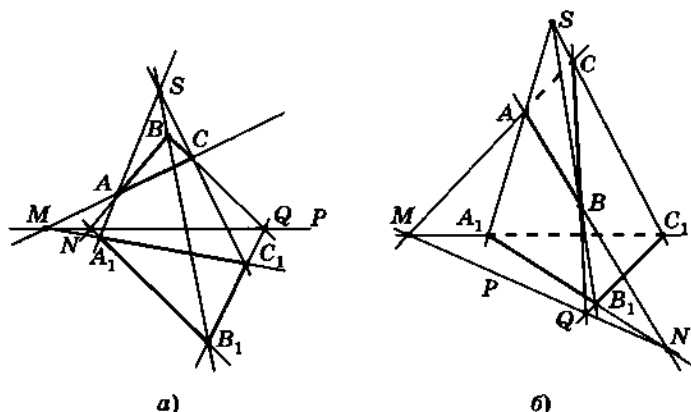


Рис. 290

и в случае, когда эти треугольники лежат в различных плоскостях (рис. 290, б): во втором случае точку S можно принять за вершину трехгранного угла с ребрами SA , SB и SC , тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — его плоские сечения, вершина S — дезаргова точка, а прямая пересечения плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$ является дезарговой прямой. (Применение этих теорем мы видим, когда строим сечения многогранников методом следов.)

Дезарг ввел также простейшую величину, которая сохраняется при центральном проектировании и является таким же основным понятием (основным инвариантом) проективной геометрии, как расстояние между двумя точками в евклидовой геометрии. Этой величиной является сложное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой, или просто сложное отношение четырех точек прямой.

Сложным (ангармоническим) отношением четырех коллинеарных точек A , B , C и D называется число $\lambda = (AB; CD) = -\frac{(AB; C)}{(AB; D)}$; $|\lambda| = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$. Точки A и B называются **базисными**, а точки C и D **делящими**. (Напомним, что в аналитической геометрии $(AB; C) > 0$, если точка C лежит внутри отрезка AB и $(AB; C) < 0$, если C лежит вне отрезка AB (см. 10 класс п. 24.5). В проективной геометрии, для несобственной точки C $(AB; C) = -1$.)

В частности, если $(AB; CD) = -1$, то говорят: «пара точек A и B гармонически разделена парой точек C и D » или «точка

D гармонически сопряжена с точкой C относительно точек A и B , при этом также говорят, что A, B, C и D — гармоническая четверка точек.

Дезарг так решает задачу о построении точки, которая образует гармоническую четверку с тремя данными точками 1, 2, 3, лежащими на прямой p . (Все точки и прямые занумерованы в порядке их появления.) Через точку 1 (рис. 291) проводятся две любые прямые 4 и 5, а через точку 2 — любая прямая 6, затем находят точки 7 и 8 ее пересечения с прямыми 5 и 4; затем через каждую из этих точек и точку 3 проводятся прямые 9 и 10, в результате чего получаются точки 11 и 12, через которые проводится прямая 13, пересекающая данную прямую p в точке 14. Дезарг доказал, что точка 14 гармонически сопряжена с точкой 2 относительно точек 1 и 3.

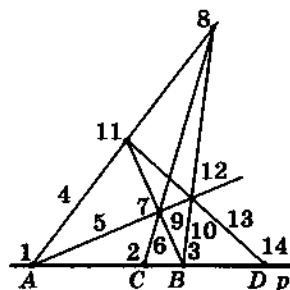


Рис. 291

Оказывается, если точка C — середина отрезка AB , то точкой, гармонически сопряженной с C относительно точек A и B , является несобственная точка прямой AB . (Повторите построения Дезарга для случая, когда точка 2 является серединой отрезка с концами в точках 1 и 3, и вы увидите, что прямая 13 станет параллельной прямой p .)

Идеи Дезарга построения проективной геометрии были настолько новы и оригинальны, что большинство его современников оказалось не в состоянии их воспринять. Лишь через двести лет со времени издания «Чернового наброска», в 1846 г., известный французский геометр и историк математики, член Парижской Академии наук Мишель Шаль (1793—1880) нашел копию этой брошюры. Только тогда Дезарга стали называть создателем новой геометрии, творцом проективной геометрии, великим геометром.

Одним из немногих современников, понимавших Дезарга, был великий французский математик, физик, философ и писатель XVII в. Блез Паскаль (1623—1662), которого также считают создателем и творцом проективной геометрии.

Блез Паскаль родился в Клермон-Ферране, в семье известного французского математика Этьена Паскаля. Через несколько лет семья Паскаля переехала в Париж. Уже в детские

годы обнаружили необыкновенные способности Паскаля. Его отец на вопрос сына о том, что такое геометрия, ответил: «Геометрия есть наука, дающая средство правильно чертить фигуры и находить отношения, существующие между этими фигурами».

Паскаль шагнул вслед за Дезаргом вперед, и в 1640 г., в возрасте менее 17 лет, им было напечатано «Эссе о конических сечениях», автор которого укрывался за скромными инициалами Б. П.

Паскалю принадлежит открытие и доказательство одной из основных теорем проективной геометрии — знаменитой теоремы о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение.



Блез Паскаль
(1623—1662)

Теорема Паскаля. Три пары противоположных сторон любого шестиугольника, вписанного в коническое сечение, пересекаются в точках, принадлежащих одной прямой (рис. 292). Эту прямую называют прямой Паскаля.

Дальнейшее развитие, а по сути «второе рождение» проективной геометрии в начале XIX в., в виде самостоятельной ветви геометрии, связано с именем одного из крупнейших французских геометров XIX в. Жаном Виктором Понселе (1788—1867).

Жан Виктор Понселе родился в городе Метце. Уже ребенком он проявил большую самостоятельность. Учился он сначала в лицее г. Метца, в знаменитой Политехнической школе, затем поступил в Военное Инженерное Училище, которое он окончил в 1811 г. По окончании училища 17 июня 1812 г. Понселе получил приказ присоединиться к армии, которая направлялась на войну против России.

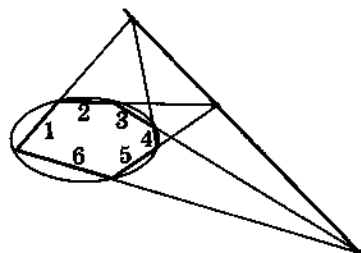


Рис. 292

Был четырехдневный бой с 3 по 6 ноября 1812 г. при селе Красное Смоленской губернии, за блес-

тящую победу в котором фельдмаршал М. И. Кутузов получил титул «Князя Смоленского», а половина наполеоновской армии попала в русский плен. Среди пленных — офицер инженерного корпуса Жан Виктор Понселе. Партия пленных, в которой находился Понселе, была отправлена в Саратов.

В плену он решил заняться любимым делом — наукой и из плена привез на родину записки по геометрии, ставшие основой для вышедшего в 1822 г. «Трактата о проективных свойствах фигур».

После пятнадцатимесячного пребывания в плену Понселе в 1814 г. вернулся во Францию, где с 1815 г. работал в арсенале Метца в качестве военного инженера, затем профессором Прикладной школы (1825—1835). В 1848—1850 гг. Понселе — директор Политехнической школы в Париже. Понселе скончался в 1867 г.

В 1822 г. вышла из печати книга Понселе «Трактат о проективных свойствах фигур», в которой Понселе впервые в научной геометрии назвал проективными те свойства геометрических фигур, которые сохраняются при центральном проектировании, и определил предмет проективной геометрии как науку, изучающую проективные свойства фигур, при этом в проективной геометрии две фигуры, обладающие одинаковыми проективными свойствами, стали считать неразличимыми (*проективно эквивалентными*). Теперь стали понятны мысли Дезарга о том, что с проективной точки зрения, окружность, эллипс, парабола, гиперболола — одна и та же кривая.

Что же еще нового мы видим в проективной геометрии? Так как при центральном проектировании ни параллельность прямых, ни их перпендикулярность, ни длина отрезка, ни величина угла не сохраняются, то в проективной геометрии отсутствуют такие понятия, как прямоугольник, параллелограмм, квадрат или трапеция. Нет в проективной геометрии ни правильных треугольников, ни правильных тетраэдров, ни куба, ни прямоугольного параллелепипеда; отсутствуют в проективной геометрии как теорема Пифагора (в проективной геометрии нет прямоугольных треугольников), так и теорема о трех перпендикулярах и многие другие теоремы



Жан Виктор
Понселе
(1788—1867)

относительно метрических свойств плоских и пространственных фигур.

Тогда возникает вопрос о том, что же содержательного «осталось в проективной геометрии» и есть ли необходимость в ее изучении.

Осталось! Более того, в этой новой «проективной» геометрии изучаются более глубокие и более общие, замечательные факты о свойствах плоских и пространственных фигур.

Осталось сложное отношение четырех точек — основной инвариант проективной геометрии; остались гармонические четверки точек, остались замечательные теорема Паскаля, теорема Дезарга и ей обратная теорема. Остались многие и появились новые, проективные теоремы. Очень важным при центральном проектировании является тот факт, что любые три точки, лежащие на одной прямой, проектируются в три точки, также лежащие на одной прямой.

Но есть другие, ничуть не менее интересные фигуры.

Познакомимся, например, с фигурой, которую называют *полным четырехугольником*.

Полным четырехугольником $ABCD$ (или *полным четырехвершинником*) называют плоскую фигуру, состоящую из четырех точек A, B, C и D , никакие три из которых не лежат на одной прямой, и шести прямых AB, BC, CD, DA, AC и BD , попарно соединяющих эти точки (рис. 293, а). Эти четыре точки A, B, C и D называют *вершинами*, а шесть прямых — *сторонами* полного четырехугольника. Стороны AB и CD, BC и DA, AC и BD , не имеющие общей вершины, называют *противоположными*. Точки пересечения пар противоположных сторон называют *диагональными точками*, а прямые, соединяющие диагональные точки, — *диагоналями* полного четырехугольника.

Любой полный четырехугольник является проективной фигурой и обладает следующим проективным свойством. Пусть точки $M = AB \cap CD$ и $N = BC \cap AD$ — две диагональные точки полного четырехугольника $ABCD$ (рис. 293, а). Тогда точки P и Q пересечения диагонали MN со сторонами соответственно BD и AC , проходящими через третью диагональную точку $H = AC \cap BD$, гармонически разделяют пару точек M и N , т. е. $(MN; PQ) = -1$. (Сравните с рассуждениями Дезарга относительно гармонической четверки точек (см. рис. 291).)

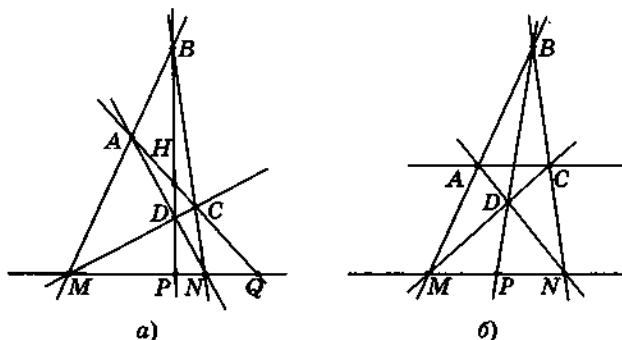


Рис. 293

Если данный полный четырехугольник вместе со всеми его диагоналями и диагональными точками центрально проектировать на другую плоскость, то полученный при этом проектировании полный четырехугольник со всеми его диагоналями и диагональными точками обладает такими же свойствами гармонизма, что и проектируемый.

Это — знаменательный факт, свидетельствующий о том, что **полный четырехугольник является проективной фигурой.**

Учитывая, что точкой, гармонически сопряженной точке P — середине отрезка MN — относительно точек M и N , является несобственная точка Q прямой MN ($Q = MN \cap AC$), приходим к выводу: на евклидовой расширенной плоскости сторона AC полного четырехугольника $ABCD$ параллельна прямой MN . А если при этом точка A является серединой отрезка BM , то точка C — середина отрезка BN . Тогда точка D становится точкой пересечения медиан AN , BP и MC треугольника BMN (рис. 293, б). Иными словами, свойство медиан треугольника пересекаться в одной точке является следствием гармонического свойства полного четырехугольника. Это означает, что проективная геометрия изучает более общие свойства фигур по сравнению с евклидовой геометрией.

Очень велико значение Понселе в «наведении порядка в проективной геометрии». Выделив проективные свойства фигур в особый класс, Понселе обнаружил и новый метод, новый инструмент их изучения, порожденный внутренней структурой проективного пространства. Этот метод вошел в геометрию под названием «Принцип двойственности»: «Малый принцип двойственности» на проективной плоскости и «Большой принцип двойственности» в проективном пространстве.

Для того чтобы понять сущность малого «Принципа двойственности», будем говорить, что *прямая a и точка B инцидентны*, если прямая a проходит через точку B или если точка B принадлежит прямой a .

Используя термин «инцидентность», получим два предложения:

Две любые точки инцидентны единственной прямой.

Две любые прямые инцидентны единственной точке.

В геометрии проективной плоскости оба эти утверждения верны; в их формулировках наблюдается «симметрия» относительно точек и прямых. Такие предложения называют *двойственными предложениями*.

А вот пример двойственных понятий в геометрии на проективной плоскости: *множество всех прямых, инцидентных одной точке S , называется пучком прямых; точка S при этом называется центром пучка прямых. Множество всех точек, инцидентных одной прямой a , называется линейным рядом точек; прямая a при этом называется носителем линейного ряда точек*. В формулировках этих понятий также наблюдается «симметрия» относительно точек и прямых: *линейный ряд точек и плоский пучок прямых — двойственные понятия*.

Оказывается, такая картина, когда всякому предложению относительно инцидентности точек и прямых на проективной плоскости соответствует двойственное ему предложение, наблюдается потому, что в проективной планиметрии имеет место малый принцип двойственности, согласно которому:

«Любому проективному предложению относительно точек и прямых на плоскости соответствует второе, двойственное предложение, которое может быть получено из первого заменой в нем слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Оба взаимно двойственных предложения верны, если доказано одно из них».

Теперь можно видеть, что теорема Дезарга и обратная ей теорема — пример двойственных предложений.

В геометрии проективного пространства также условились говорить, что «*плоскость α инцидентна точке A (прямой a)*», если точка A (прямая a) лежит в плоскости α или если плоскость α проходит через точку A (через прямую a).

При таком соглашении в формулировках различных предложений проективной стереометрии также наблюдается «симметрия» относительно точек и плоскостей. Вот некоторые из них:

«любые три точки, не инцидентные одной прямой, инцидентны одной плоскости» и «любые три плоскости, не инцидентные одной прямой, инцидентны одной точке»;

«точка и не инцидентная ей прямая инцидентны единственной плоскости» и «плоскость и не инцидентная ей прямая инцидентны единственной точке».

Оказывается, «симметрия» такого рода наблюдается потому, что в проективной стереометрии имеет место большой принцип двойственности, согласно которому:

«Любому проективному предложению относительно точек, прямых и плоскостей пространства соответствует второе, двойственное предложение, которое может быть получено из первого заменой в нем слова «точка» словом «плоскость» и слова «плоскость» словом «точка». При этом слово «прямая» не подвергать замене. Оба взаимно двойственных предложения верны, если доказано одно из них».

Убедитесь, например, что гексаэдр двойствен октаэдру, додекаэдр — икосаэдру.

Большая заслуга Понселе заключается в том, что, объединив в особый класс проективные свойства фигур, он в то же время показал, что для изучения этих свойств можно применять особый, *синтетический* проективный метод исследования, который в этом случае оказывался удобнее и сильнее аналитического.

Идеи Понселе получили дальнейшее развитие в работах немецких геометров Якоба Штейнера (1796—1863), Карла Георга Христиана фон Штаудта (1798—1867).

Якоб Штейнер родился 18 марта 1796 г. в семье швейцарского крестьянина в маленьком городке Уцендорфе недалеко от Берна. Жизнь его ничем не отличалась от жизни его товарищей — плуг, серп, хлев. Позднее он сам говорил, что к девятнадцати годам он едва умел писать, а уж о «светском воспитании» и говорить не приходится.

Якоб выделялся повышенной любознательностью, умением довольно быстро считать в уме и еще желанием стать учителем. Это желание, возможно, так и осталось бы несбывшимся,

если бы Якоб не был принят в школу-интернат (г. Ивердон), которой руководил один из основателей развивающего обучения выдающийся швейцарский педагог Иоган Генрих Песталоцци (1746—1827).

За полтора года пребывания в этом заведении Штейнер догнал своих учителей и, почувствовав интерес к математике, поступил в университет.

Первые научные работы он опубликовал в 1826 г. Одновременно Штейнер работал над капитальным сочинением «Систематическое развитие зависимостей геометрических образов одного от другого с учетом работ древних и новых геометров...». Постепенно его научные труды получают всеобщее признание. Штейнер получает звание профессора, Кенигсбергский университет присваивает ему степень доктора философии, а с 1834 г. он — член Академии наук. Однако стремительный взлет малообразованного крестьянина к академическим высотам потребовал огромного напряжения сил и дорого обошелся Штейнеру: он тяжело заболел и в апреле 1863 г. скончался.

Из задуманных Штейнером пяти частей выше упомянутой книги он написал только одну, выпущенную в Берлине в 1832 г. и обеспечившую ему бессмертие. Штейнер является самым выдающимся представителем синтетической геометрии XIX в.

Попробуем вместе со Штейнером разобраться в «систематическом развитии зависимостей геометрических образов одного от другого». Начнем с самого простого — точек и прямых.

По малому принципу двойственности **линейный ряд точек** (множество всех точек, принадлежащих данной прямой p) двойствен **пучку прямых с центром S** , а по большому принципу двойственности — **пучку плоскостей** (множеству всех плоскостей пространства, проходящих через данную прямую, которая называется **осью пучка плоскостей**).

Штейнер называет линейный ряд точек, пучок прямых и пучок плоскостей **основными формами первой ступени** в геометрии проективного пространства. Примечательно, что лю-



Якоб Штейнер
(1796—1863)

бые две формы первой ступени взаимно двойственны и любая из форм первой ступени может быть перспективно отображена на любую другую ее форму, если считать соответственными инцидентные друг другу элементы этих форм.

Далее Штейнер вводит формы второй ступени. К ним относятся:

плоское поле точек и прямых — множество всех точек и всех прямых данной плоскости, которая называется *носителем поля*;

связка прямых и плоскостей — множество всех прямых и всех плоскостей пространства, проходящих через данную точку, которая называется *центром связки*.

Нетрудно установить, что эти формы взаимно двойственны.

Основными формами третьей ступени являются пространство всех точек и пространство всех плоскостей.

Далее вводятся определения проективного преобразования прямой, плоскости и пространства.

Взаимно-однозначное отображение одного линейного ряда точек на другой, при котором сохраняется сложное отношение любых четырех соответствующих точек, называется проективным отображением; ряды при этом называют *проективными*.

В этом случае также говорят, что между линейными рядами установлено проективное соответствие.

И еще один вывод следует из наших рассуждений: проективное соответствие между двумя линейными рядами может быть задано тремя парами соответственных точек.

После распространения определения проективности двух рядов на пучки прямых (по малому принципу двойственности) и пучки плоскостей (по большому принципу двойственности) Штейнер доказал, что проективное соответствие между двумя образами первой ступени может быть определено заданием трех пар соответственных элементов. Это предложение известно как «*основная теорема проективной геометрии*».

Штейнер обосновывает проективный способ образования кривых второго порядка. Он доказал, что в проективной плоскости множество точек пересечения всех пар соответственных прямых двух проективных пучков представляет собой кривую 2-го порядка (рис. 294).

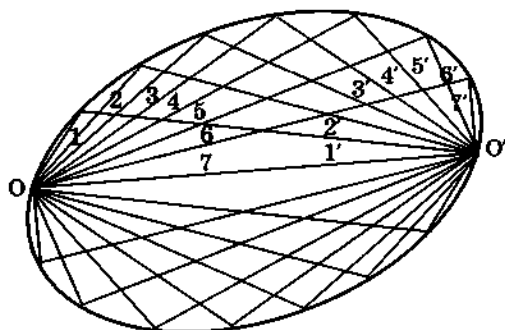


Рис. 294

Проективным способом могут быть получены также плоские и пространственные кривые третьего, четвертого и более высокого порядка, о чем мы скажем позднее.

А пока вернемся к тому, что для нахождения введенного Дезаргом сложного отношения четырех точек прямой приходится измерять длины отрезков. Но длина-то отрезка прежде всего и изменяется при проектировании. Иначе говоря, главный инвариант проективной геометрии определяется через понятие, являющееся не проективным, а метрическим (евклидовым), из чего можно, на первый взгляд, сделать «интересное» заключение о том, что проективная геометрия является частным случаем геометрии Евклида. Но это не так! На самом деле, наоборот, евклидова геометрия является частным случаем проективной.

Доказал это немецкий геометр Карл Георг Христиан фон Штаудт — родовитый дворянин из Южной Германии, обучавшийся у крупнейшего немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Штаудт был малоизвестен современникам, не стремился к популярности, вполне удовлетворялся репутацией «традиционного профессора» (профессуру он получил в 37 лет в Эрлангенском университете, в котором работал до конца своей жизни).

В своих главных трудах «Геометрия положения» и «Материалы для геометрии положения», вышедших в 1847 г. и 1856—1860 гг., Штаудт показал, как можно чисто геометрически (без применения метрических понятий) построить проективную геометрию на основе гармонизма. Для этого он вводит определение.

«Если на прямой даны три точки 1, 2, 3, то точка 4, найденная построением Дезарга—Штейнера (см. рис. 291) *называется* четвертой гармонической к точкам 1, 2, 3 и гармонически сопряженной с точкой 2 относительно точек 1 и 3». Обратите внимание: *называется!* Теперь не нужно ничего измерять, а просто, используя полный четырехугольник, построить по данным трем точкам некоторую определенную четвертую точку и назвать ее четвертой гармонической. При этом Штаудт доказал, что положение этой «четвертой гармонической» однозначно определено и не зависит от «выбора» четырехугольника. А коль скоро гармонизм определен проективным образом и однозначно, то его можно использовать для определения проективного соответствия линейных рядов («*Два ряда (пучка) называются проективными, если между ними установлено взаимно-однозначное соответствие так, что любой гармонической четверке элементов одного соответствует гармоническая четверка другого*»). Штаудт доказал, что это определение эквивалентно аналогичному определению Штейнера. Вот теперь и база проективной теории стала проективной и вся надстройка проективной геометрии сохраняется, что свидетельствует о «самодостаточности» проективной геометрии как науки о проективных свойствах проективных фигур.

Основная теорема проективной геометрии Штаудтом формулируется так: «В проективном соответствии, установленном между точками одной и той же прямой, не может существовать более двух двойных точек, если это соответствие не является тождественным». (В такой формулировке эта теорема носит имя Штаудта.)

Заслуга Штаудта состоит в том, что в его работах четко зафиксирована независимость проективной геометрии от



Константин
Алексеевич
Андреев
(1848—1921)



Алексей
Константинович
Власов
(1868—1922)

измерений, что послужило более быстрому дальнейшему развитию проективной геометрии.

Теперь можно строить проективную геометрию в образах второй и третьей ступеней.

Отображение одной плоскости на другую называется коллинеацией, если любые три коллинеарные точки отображаются на три коллинеарные точки. В таком случае также говорят, что между плоскостями установлена (задана) коллинеация.

С помощью полного четырехугольника можно доказать, что при любой коллинеации между двумя плоскостями всякий линейный ряд (пучок прямых) одной плоскости отображается на проективный ему линейный ряд (пучок прямых) другой, поэтому говорят, что между плоскостями задана проективная коллинеация.

Интерес представляет проективное отображение плоскости на себя, которое называют *проективным преобразованием плоскости*. При этом имеют место следующие две основные теоремы.

«Существует единственное проективное преобразование плоскости, при котором невырожденный полный четырехугольник $ABCD$ отображается на другой невырожденный полный четырехугольник $A'B'C'D'$ ».

«Проективное преобразование плоскости не может иметь более трех двойных точек, если это преобразование не является тождественным».

Крупнейший немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925) изложил в 1872 г. свои взгляды на геометрию в знаменитой «Эрлангенской программе», согласно которой геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях, образующих группу.

Исходя из этой точки зрения на геометрию, стало возможным сказать, что проективная планиметрия представляет собой науку о проективных свойствах



Нил Алексеевич
Глаголев
(1888—1945)



Феликс Клейн
(1849—1925)

вах плоских фигур, т. е. таких свойствах геометрических фигур, которые сохраняются при всех проективных преобразованиях проективной плоскости. Проективная стереометрия — наука о проективных свойствах пространственных фигур. (Не об этом ли (правда, не в такой форме) говорил Понселе еще в 1822 г.?)

Одним из первых русских ученых, занимавшихся вопросами проективной геометрии, был профессор МГУ Василий Яковлевич Цингер (1836—1907), читавший курс проективной геометрии в МГУ.

Следует, прежде всего, среди учеников проективистов В. Я. Цингера назвать Константина Алексеевича Андреева (1848—1921), который приходит к выводу: проективное взаимно-двузначное соответствие двух пучков прямых порождает кривые третьего и четвертого порядка.

Глубокие и оригинальные работы в области проективной геометрии принадлежат ученику В. Я. Цингера профессору Московского университета Алексею Константиновичу Власову (1868—1922), который развивает теорию линейных систем конических сечений, решает задачу построения образов высших порядков в формах первой степени и др.

Среди достойных преемников К. А. Андреева и А. К. Власова выделяется профессор МГУ Нил Александрович Глаголев — (1888—1945). Наиболее крупным результатом его работы является решение общей задачи проективного исчисления, начало которому было положено в работах Штейнера и Штаудта.

Большой вклад в изучение проективной геометрии в России внесли Н. А. Глаголев, А. А. Глаголев, Г. Б. Гуревич, Д. Д. Мордухай-Болтовской, А. Н. Колмогоров, П. К. Рашевский, Б. А. Розенфельд, З. А. Скопец, Н. Ф. Четверухин и многие другие.

Во второй половине XX столетия интенсивное развитие проективная геометрия



Николай
Федорович
Четверухин
(1891—1974)



Залман Алтерович
Скопец
(1917—1984)

получила в трудах ученых Ярославской геометрической школы, организатором и бессменным руководителем которой был доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой геометрии Ярославского педагогического института (ныне — университета) им. К. Д. Ушинского Залман Алтерович Скопец (1917—1984), научные исследования которого посвящены вопросам как элементарной, так и проективной, начертательной, неевклидовой и алгебраической геометрий.

5.5. О неевклидовой геометрии Лобачевского

До начала XIX столетия не возникало сомнений в незыблемости геометрии Евклида и невозможности логического обоснования и построения другой геометрии, отличной от евклидовой. Но это «невозможное» сделал великий русский ученый, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792—1856). Он открыл новую геометрию, которая оказалась также логически безупречной и верной, как и геометрия Евклида.

Однако не следует думать, что если созданная Лобачевским геометрия является новой, то она во всем отличается от евклидовой геометрии. Это далеко не так.

Начальные сведения геометрии Евклида и геометрии Лобачевского во многом, естественно, совпадают. Для них одинаковы определения и аксиомы (исключая аксиому параллельности прямых), а также ряд теорем об углах и о треугольниках. Отличаться начинают эти геометрии одна от другой лишь тогда, когда неизбежным становится применение той или иной аксиомы параллельности. Дело в том, что аксиома параллельности Лобачевского радикально отличается от аксиомы параллельности Евклида.

Вот эти аксиомы в современной формулировке.

Аксиома параллельности Евклида. На плоскости, через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, которая не пересекает данную (т. е. параллельна ей).

Аксиома параллельности Лобачевского. На плоскости, через точку, взятую вне данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, которые не пересекают данную (т. е. параллельны ей).

Совокупность предложений геометрии, доказательства которых не опираются на аксиому параллельности прямых или на предложения, уже ранее доказанные с ее помощью, принято называть *абсолютной геометрией*. При этом совокупность предложений геометрии, доказательства которых опираются на аксиому параллельности Евклида или на предложения, уже ранее доказанные с ее помощью, называют *геометрией Евклида* (*собственно евклидовой геометрией*), а совокупность предложений геометрии, доказательства которых опираются на аксиому параллельности Лобачевского или на предложения, уже ранее доказанные с ее помощью, — *геометрией Лобачевского* (*неевклидовой геометрией*). Из сказанного видно, что все предложения абсолютной геометрии справедливы как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского.

После «Начал» Евклида, в которых сформулирована аксиома параллельности (она появилась в «Началах» под названием «Пятый постулат»), до создания геометрии Лобачевского (он назвал ее «воображаемой») прошло около 20 веков, в течение которых проблема пятого постулата волновала умы многих крупнейших математиков мира того времени.

Дело в том, что при анализе «Начал» обнаруживается, что V постулат Евклида существенно отличается от остальных сложностью формулировки. Этот постулат Евклидом сформулирован так: *«если при пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей сумма внутренних односторонних углов не равна $2d$, то эти прямые пересекаются и притом с той стороны, где эта сумма меньше $2d$ »* (Символом d раньше обозначали величину прямого угла.)

В то же время V постулат находит довольно позднее свое применение: «Начала» разбиваются как бы на две независимые части — абсолютная геометрия («геометрия без V постулата») и собственно евклидова геометрия («геометрия с V постулатом»). В этой связи естественно возникают вопросы: нужен ли V постулат? Нельзя ли логически вывести его из остальных постулатов и аксиом? Иначе говоря, не зависит ли V постулат от остальных постулатов и аксиом евклидовой геометрии?

Начавшиеся уже в эллинискую эпоху попытки вывести пятый постулат о параллельных прямых как логическое следст-

ние из остальных постулатов и аксиом евклидовой геометрии неизменно продолжались в средние и новые века. Весь смысл задачи заключался в том, чтобы доказать этот постулат, не вводя вместо него никаких других допущений.

Трудно указать выдающегося математика, начиная с Птолемея (II в.) и кончая автором классического курса элементарной геометрии Лежандром (1752—1833), который не прилагал бы усилий к тому, чтобы, по выражению Лобачевского, «заделать брешь теории параллельных». Прокл (410—485), например, писал о пятом постулате: *«Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это — теорема, вызывающая много сомнений»*.

Ошибки ученых при доказательствах V постулата иногда заключались в погрешностях, которые допускали авторы, запутавшись в сложных построениях, чаще же всего в том, что вместо доказываемого постулата явно или косвенно вводился другой, равносильный ему постулат. Обычно эти доказательства проводились методом от противного: принимали положение, противное доказываемому, и старались путем логических рассуждений получить противоречие с уже установленными предложениями. Кроме того, авторы в ту пору еще не достаточно четко оперировали с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, «свободно» пользуясь которыми можно доказать все, что угодно.

Одним из ученых, работавших над проблемой пятого постулата, был профессор Оксфордского университета Джон Валлис (1616—1703). Он считал бесспорным следующее положение: *«для каждой фигуры всегда существует подобная ей фигура произвольной величины»*, и в 1663 г. на основании этой аксиомы изложил «доказательство» V постулата Евклида. На самом деле, аксиома Валлиса о существовании подобных фигур эквивалентна V постулату («забегая вперед» скажем, что в геометрии Лобачевского подобные треугольники не существуют).

Другим ученым, предвосхитившим неевклидову геометрию, был итальянский математик Джироламо Саккери (1667—1733), преподававший грамматику в иезуитской коллегии в Милане. Здесь, под влиянием Джованни Чевы (1648—1734), Саккери стал серьезно заниматься математикой. Впоследствии он преподавал математику в университете г. Павии.

В 1773 г. Саккери опубликовал книгу под названием «Евклид, очищенный от всех пятен». В ней Саккери поставил перед собой задачу, в первую очередь, доказать V постулат, однако, он не сумел до конца пройти намеченный им путь. *(Лобачевский, идя по этому пути, сумел открыть неевклидову геометрию.)*

Саккери независимым способом доказывает, что сумма углов треугольника не может быть более 180° , если принять постулат о параллельных линиях, то эта сумма равна 180° ; если его опровергнуть, то она должна быть меньше 180° . Исходя из допущения, что сумма углов треугольника меньше 180° (*«гипотеза острого угла»*), Саккери доказывает, что две непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неограниченно сближаются в другую сторону, либо имеют общий перпендикуляр, от которого они расходятся, бесконечно удаляясь друг от друга в обе стороны. Он доказывает, что *(при гипотезе острого угла)* перпендикуляр к одной стороне острого угла сначала пересекает вторую сторону, а потом, по мере удаления от вершины, перестает ее пересекать; что при этом существует предельный — первый не пересекающий перпендикуляр. Саккери заявляет: *«Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии»*. Это заявление Саккери свидетельствует о его некомпетентности в обращении с бесконечно удаленными точками. И тем не менее, он заканчивает: *«На этом я мог бы спокойно остановиться; но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная гипотеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе...»* Далее следуют выводы, совпадающие с первыми предложениями геометрии Лобачевского.

Заслуга Саккери состоит в том, что он первый со всей определенностью связал учение о параллельных линиях с вопросом о сумме углов треугольника: три гипотезы, которые при этом возникают, действительно ведут к трем возможным геометрическим системам, трем различным геометриям: геометрии Евклида, геометрии Лобачевского, геометрии Римана.

Берхард Риман (1826—1866) — великий немецкий математик, последователь Лобачевского, в своей лекции «О гипо-

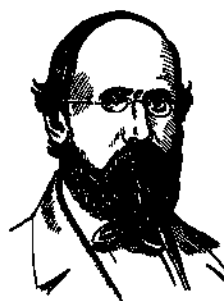
тезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854 г. в Геттингенском университете, включил в число аксиом предложение: «каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую», откуда следует, что в геометрии Римана вообще не существует параллельных прямых. Эта аксиома выполняется, например, в геометрии на сфере, где сумма углов сферического треугольника больше 180° . Заметим, что лекцию высоко оценил присутствовавший на ней Карл Гаусс, однако она осталась незамеченной в математическом мире. Только после смерти Б. Римана текст лекции был обнаружен в его бумагах Р. Дедекиндом, опубликован в 1868 г. и произвел огромное впечатление на ученых-математиков всего мира.

О сферической геометрии вы можете прочитать очерк в конце этого учебника.

К числу предшественников Лобачевского следует отнести и члена Берлинской Академии наук — астронома, математика и философа Иоганна Генриха Ламберта (1728—1777), родившегося в Эльзасе, в г. Мюльгаузене, который состоял в Швейцарском союзе. В середине 60-х годов Ламберт занимался теорией параллельности и в середине XVIII в. опубликовал сочинение «Теория параллельных линий», в котором содержатся такие же выводы, как и у Саккери. Он даже делает заключение о том, что гипотеза острого угла имеет место «на какой-то мнимой сфере». (Это замечательное предвидение оправдалось примерно через сто лет.)

В заключение своих исследований в теории параллельных Ламберт приходит к твердому выводу о том, что все попытки доказать V постулат Евклида ни к чему не приведут.

XIX в. начинается замечательными исследованиями Адриена Мари Лежандра (1752—1833) по теории параллельных линий, выпустившего в свет «Начала геометрии», а затем обширную статью, помещенную в «Мемуарах Парижской академии», где он показывает, что теорема о сумме внутренних углов прямолинейного треугольника эквивалентна V постулату. К предшественникам Лобачевского относятся также



Бернхард Риман
(1826—1866)

немецкий юрист и математик профессор Харьковского университета Ф. К. Швейкарт (1780—1857) и его племянник Ф. А. Тауринус (1794—1874). Швейкарт независимо от других пришел к убеждению, что кроме евклидовой геометрии может существовать еще и другая, которую он называет «*астральной*» геометрией и в которой сумма углов треугольника менее двух прямых углов, но своих выводов он не опубликовал.

Два тысячелетия бесплодных попыток доказать пятый постулат привели Н. И. Лобачевского к мысли о том, что этот постулат не зависит от других аксиом евклидовой геометрии, и поэтому его доказать нельзя.

Лобачевский обратился к методу доказательства от противного, допустив, что V постулат неверен. Из этого допущения последовали предложения, противоречащие многим теоремам классической геометрии и нашим представлениям о пространстве, которые сложились на основе многовекового опыта. Огромная заслуга Лобачевского заключается в его понимании, что эти противоречия коренятся не в том, что V постулат есть следствие остальных геометрических аксиом и не в том, что, отвергая его, мы впадаем в противоречие с этими аксиомами, а в том, что V постулат есть новое независимое допущение, не вытекающее из других постулатов и аксиом, и поэтому, не нарушая этих аксиом, мы можем его принять и можем его отвергнуть. Принимая его, Евклид создал свою классическую геометрию; отвергая его, Лобачевский создал свою «воображаемую геометрию», столь же строгую, логически безупречную и непротиворечивую, как и геометрия Евклида. Обе геометрии одинаково верны с логической точки зрения, и возникшие противоречия — результат различия двух различных геометрических систем.

Вернемся к вопросу о параллельных линиях и рассмотрим некоторые вопросы неевклидовой геометрии (планиметрии) Лобачевского.

Прежде всего напомним, что все предложения абсолютной геометрии справедливы в геометрии Лобачевского.

Плоскость, в которой выполняются все аксиомы абсолютной геометрии и аксиома параллельности Лобачевского, называется гиперболической плоскостью или плоскостью Лобачевского.

Пусть в данной гиперболической плоскости α точка C лежит вне данной прямой AB . По аксиоме параллельности Лобачевского в плоскости α через точку C можно провести по крайней мере две прямые, которые не пересекают прямую AB . Обозначим эти прямые CK и CP (рис. 295). Если прямые CK и CP не пересекают прямую AB , то любая прямая CM , проходящая между прямыми CK и CP в вертикальных углах $K'CP$ и KCP' , также не пересекает прямую AB , т. е. на основании аксиомы параллельности Лобачевского через точку C в плоскости ABC проходит бесконечное множество прямых, непересекающих прямую AB .

С другой стороны, если X — любая точка прямой AB , то прямая CX пересекает прямую AB в точке X , причем прямая CX проходит уже в вертикальных углах KCP и $K'CP'$. Вращая прямую CX вокруг точки C в направлении против часовой стрелки, мы будем получать прямые, пересекающие прямую AB соответственно в точках $X_1, X_2, \dots$, расположенных правее точки X (см. рис. 295).

Таким образом, через точку C проходит бесконечно много прямых, пересекающих прямую AB , и бесконечно много прямых, не пересекающих AB . При этом, «пересекающие» прямые лежат по одну сторону от «непересекающих», т. е. если CF и CH — «непересекающие» прямые, то ни одна прямая, лежащая между ними внутри угла FCH , не может быть «пересекающей» прямой и наоборот (см. рис. 295).

Такое разбиение всех прямых пучка с центром C означает, что должна существовать либо последняя «пересекающая» прямую AB , либо первая «непересекающая» эту прямую. Но, как легко убедиться, последней «пересекающей» прямую AB быть не может, значит, граничной прямой, отделяющей «пересекающие» прямую AB от «непересекающих» ее, является первая «непересекающая». Эту граничную прямую Лобачевский и называет прямой, параллельной прямой AB точке C .

Пусть этой прямой является прямая CY (рис. 296). Тогда прямая CZ , симметричная CY относительно перпендикуляра CL к данной прямой AB , также параллельна прямой AB точке C .

Таким образом, в гиперболической плоскости картина расположения прямых, проходящих через точку C , относи-

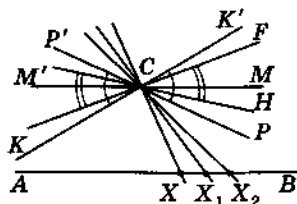


Рис. 295

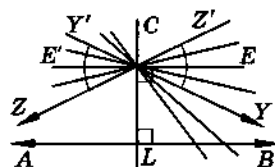


Рис. 296

тельно прямой AB , представляется в таком виде: через точку C проходят две прямые $Y'Y$ и $Z'Z$, параллельные прямой AB , расположенные симметрично относительно перпендикуляра CL к данной прямой AB ; прямые, расположенные внутри вертикальных углов $Y'CZ$ и YCZ' не пересекают прямую AB . Лобачевский называет эти прямые *расходящимися с AB* : все остальные прямые пучка с центром C (они пересекают AB) Лобачевский называет *сходящимися с AB* .

В целях наглядности на рисунках будем указывать стрелкой направление прямой и при этом говорить, что *направленная* прямая $Y'Y$ параллельна *направленной* прямой AB , а *направленная* прямая $Z'Z$ параллельна *направленной* прямой BA (см. рис. 296).

Заметим, что прямая EE' (см. рис. 296), проходящая через точку C перпендикулярно прямой CL ($CL \perp AB$), принадлежит к числу прямых, расходящихся с AB , т. е. в гиперболической плоскости две прямые, имеющие общий перпендикуляр расходятся. (В евклидовой плоскости две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.)

Параллельные прямые как в евклидовой, так и в гиперболической плоскости обладают следующими свойствами: если $AB \parallel CD$, то $CD \parallel AB$; если $AB \parallel CD$, $CD \parallel KP$, то $AB \parallel KP$.

Николай Иванович Лобачевский ввел следующее понятие угла параллельности.

Пусть AK и AP — прямые, параллельные прямой BC в точке A , AD — перпендикуляр к BC (рис. 297). (Прямые AK и AP симметричны относительно AD .) В плоскости Лобачевского углом параллельности, соответствующим данной прямой BC в данной точке A , вне ее лежащей, называется острый угол KAD

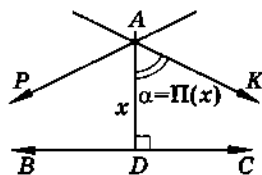


Рис. 297

между перпендикуляром AD , опущенным из точки A на BC , и прямой AK , параллельной данной прямой BC .

Если длину перпендикуляра AD обозначить x , то где бы точка A ни была расположена относительно прямой BC , находясь от нее на расстоянии x , величина угла параллельности не изменяется. Иначе говоря, угол параллельности в плоскости Лобачевского является инвариантом движения. Это, в свою очередь, означает, что с изменением расстояния x от точки A до прямой BC угол параллельности меняет свою величину, т. е. угол параллельности является функцией расстояния x от точки A до прямой BC . Эту функцию Лобачевский обозначает через $\Pi(x)$: $\alpha = \Pi(x)$. (Евклидова геометрия характеризуется тем, что в ней угол $\alpha = \Pi(x)$ всегда прямой, каков бы ни был отрезок AD .)

Лобачевский доказывает, что $0 < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}$. При этом функция $\Pi(x)$ монотонно убывает с возрастанием аргумента x :

$\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, т. е. по мере удаления точки A от прямой BC угол $\alpha = \Pi(x)$ уменьшается от 90° до 0° . Более того, каков бы ни был острый угол α , всегда существует один и только один отрезок длиной x такой, что $\Pi(x) = \alpha$, т. е. функция $\Pi(x)$ обратима.

Здесь уместно заметить, что мы, вероятно, потому питаем большое доверие к евклидовой геометрии, что все доступные нам измерения происходят в таком незначительном уголке вселенной, что не представляется возможным обнаружить отличие евклидовой геометрии от наших ощущений. Поэтому не исключено, что вера в утверждение «сумма внутренних углов линейного треугольника равна 180° » была обусловлена тем, что экспериментальной проверке этого утверждения подвергались треугольники достаточно малых размеров. Лобачевский вычислил сумму углов треугольника, вершинами которого служили Земля, Солнце и звезда Сириус, и получил угловой дефект (угловой недостаток до 180°) $0'',000372$. (Даже столь малое отличие суммы углов этого треугольника от 180° не поколебало убежденности Лобачевского в неевклидовости мирового пространства.)

Следствием аксиомы параллельности Лобачевского является рождение новой геометрии, которую называют геомет-

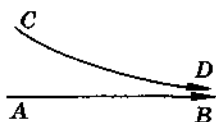


Рис. 298

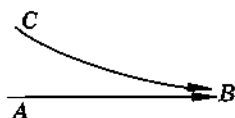


Рис. 299

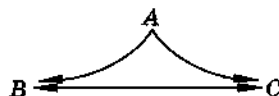


Рис. 300

рией Лобачевского или гиперболической геометрией. В этой геометрии имеется ряд предложений, совершенно отличающихся от соответствующих предложений геометрии Евклида.

Некоторые из утверждений планиметрии Лобачевского мы приведем в качестве примеров. Доказывать же здесь эти предложения нам не представляется возможным.

Вот некоторые из этих утверждений.

Точки ориентированной прямой CD , параллельной прямой AB , неограниченно приближаются к AB в сторону параллельности и неограниченно от нее удаляются в противоположную сторону. Это неограниченное приближение параллели CD к AB выражают так: параллельные прямые в сторону параллельности асимптотически приближаются одна к другой (рис. 298) (*по-видимому, именно асимптотическое приближение прямых друг к другу было не до конца понято Саккери при исследовании им гипотезы острого угла*).

Прямая в гиперболической плоскости имеет две бесконечно удаленные точки. (*В евклидовой плоскости прямая дополняется только одной бесконечно удаленной точкой.*)

В гиперболической плоскости существует ряд «интересных» особенностей взаимного расположения параллельных прямых (параллелей).

Договоримся, что если две параллели имеют общую бесконечно удаленную точку B , то будем записывать $AB \parallel CB$. На рисунках направления параллельности будем указывать стрелками (рис. 299).

Фигуру, состоящую из двух лучей AB , AC и прямой BC , которой они параллельны в одну и в другую сторону (рис. 300) (*конфигурация Лобачевского—Больяи*), можно рассматривать как треугольник с одной конечной и двумя бесконечно удаленными вершинами.

В геометрии Лобачевского треугольник с двумя конечными и одной бесконечно удаленной вершинами иногда (рис. 301) называют *двуугольником*.

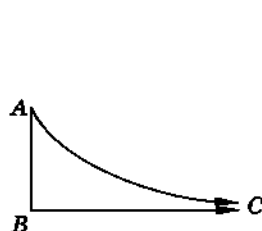
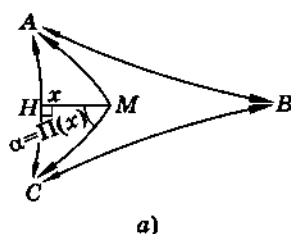
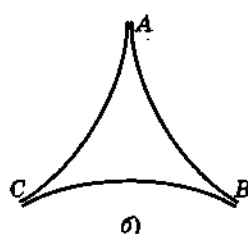


Рис. 301



а)



б)

Рис. 302

Теперь возьмем между параллелями AB и CB любую точку M и проведем через нее прямые MA и MC , параллельные тем же прямым, обращенным в противоположные стороны, т. е. направленным прямым BA и BC (рис. 302, а; $MA \parallel BA$, $MC \parallel BC$). Пусть $\angle AMC = 2\alpha$. Тогда на биссектрисе угла AMC существует такая точка H , удаленная от точки M на расстояние x , что $\Pi(x) = \alpha$. Прямая AC , проходящая через точку H перпендикулярно MH , параллельна каждой из прямых MA и MC , значит, параллельна BA и BC . Таким образом мы получили треугольник ABC , все три стороны которого попарно параллельны (рис. 302, б).

В гиперболической плоскости две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они неограниченно удаляются одна от другой (рис. 303). Длина этого перпендикуляра принимается за расстояние между расходящимися прямыми.

Пусть AB и CH — две расходящиеся прямые. Из середины M их общего перпендикуляра KP проведем прямые $MB \parallel KB$ и $MA \parallel KA$, $MN \parallel PH$ и $MC \parallel PC$ (рис. 304) (такие прямые существуют, согласно обратимости функции Лобачевского $\Pi(x)$). Тогда для каждого из углов AMC и BMH существуют соответственно прямые AC и BH , параллельные сторонам этих углов.

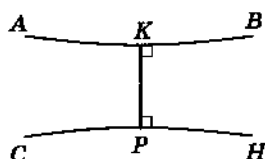


Рис. 303

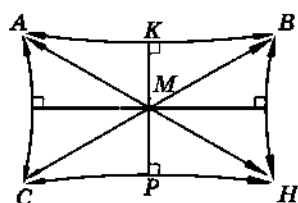


Рис. 304

Конфигурация, которую мы таким образом получили, представляет собой своеобразный четырехугольник $ABHC$, четыре вершины которого лежат в бесконечно удаленных точках прямых, являющихся его сторонами; стороны и диагонали этого четырехугольника параллельны между собой в направлениях, указанных стрелками. (О таком четырехугольнике упоминает Швейкарт в заметке, которую он послал Гауссу.)

Далее, сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского является переменной величиной — она меняется от треугольника к треугольнику, но всегда остается меньше 180° . Угловым дефектом треугольника ABC в плоскости Лобачевского (его обозначают δ_{ABC}) называется разность между числом π и суммой величин всех трех его внутренних углов, т. е. $\delta_{ABC} = \pi - (A + B + C)$, где A, B и C — величины соответствующих углов в радианном измерении.

В гиперболической плоскости площадь треугольника пропорциональна его угловому дефекту, т. е. $S_{\triangle ABC} = k^2 \cdot \delta_{ABC} = k^2 \cdot (\pi - A - B - C)$, где k — гиперболическая постоянная. Это означает, например, что в гиперболической плоскости все треугольники, имеющие общее основание и одну и ту же сумму углов, равновелики.

В геометрии Лобачевского нет подобных треугольников, т. е. все треугольники, имеющие соответственно равные углы, равны между собой.

Существуют треугольники, вокруг которых нельзя описать окружность и в которые нельзя вписать окружность. Дело в том, что в гиперболической плоскости *серединные перпендикуляры к сторонам треугольника либо пересекаются в одной точке, либо параллельны, либо все три перпендикуляры к одной прямой; то же имеет место и относительно биссектрисы внутренних углов треугольника.*

В гиперболической плоскости имеются три типа пучков прямых: пучок сходящихся прямых, пучок параллельных прямых, пучок расходящихся прямых — множество всех прямых плоскости, перпендикулярных одной прямой — базисной прямой пучка.

В евклидовой плоскости имеются только две линии постоянной кривизны — прямая и окружность.

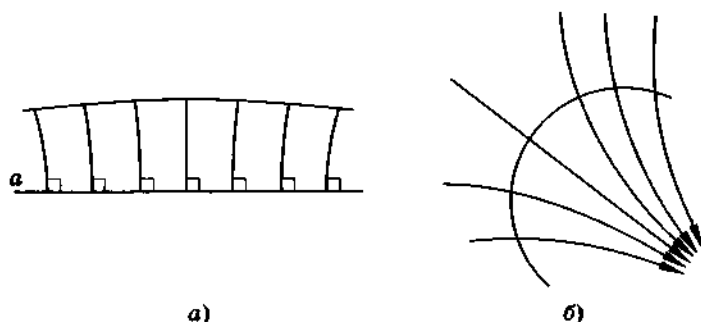


Рис. 305

В плоскости Лобачевского, кроме прямой и окружности, линиями постоянной кривизны являются *эквидистанта* и *предельная линия* (ее еще называют *орициклом*).

Эквидистанта представляет собой множество всех точек гиперболической плоскости, равноудаленных от данной прямой a ; она состоит из двух ветвей, расположенных по одной в разных полуплоскостях относительно данной прямой a , называемой *базой эквидистанты* (на рис. 305, a изображена одна ветвь эквидистанты). (В евклидовой плоскости такое множество точек представляет собой две параллельные прямые.) Прямую в гиперболической плоскости можно отнести к эквидистантам, если расстояние от данной прямой — базы положить равным нулю.

Предельную линию можно представить как окружность бесконечно большого радиуса (рис. 305, b) (*предельный переход от окружности конечного радиуса к окружности бесконечно большого радиуса выражен в названии этой линии*).

Мы познакомились с некоторыми утверждениями планиметрии Лобачевского. Геометрию в плоскости Лобачевского (в гиперболической плоскости) называют *гиперболической геометрией*.

Не менее интересна геометрия в пространстве Лобачевского, т. е. в пространстве, в котором выполняется аксиома параллельности Лобачевского.

Заметим, что в евклидовом пространстве существуют два вида поверхностей постоянной кривизны — *плоскость* и *сфера*, которые допускают внутреннюю геометрию, основанную на движении без деформации: на первой имеет место евклидова геометрия, на второй — сферическая геометрия (см. «Эле-

менты сферической геометрии» в конце учебника). Кроме того, итальянский геометр Э. Бельтрами показал, что в евклидовом пространстве существуют поверхности, которые несут на себе планиметрию Лобачевского (см. «Дифференциальная геометрия» в конце учебника). Эти поверхности называют *псевдосферами* (рис. 306). Образно выражаясь, можно сказать, что на псевдосферическую поверхность наворачивается гиперболическая плоскость, подобно тому, как на обыкновенную цилиндрическую поверхность наворачивается евклидова плоскость. На рисунке 306, б можно видеть, что на «плоскости Лобачевского» (на псевдосфере) через точку A , не лежащую на «прямой» a , проходят две «прямые» b и c , не пересекающие «прямую» a .

Не менее интересная картина наблюдается в пространстве Лобачевского, в котором в гиперболической плоскости имеет место гиперболическая геометрия, а геометрия на сфере та же самая, что и в пространстве Евклида (*сферическая геометрия*).

Но в пространстве Лобачевского существуют и другие поверхности, которые допускают внутреннюю геометрию поверхности.

Если предельную линию вращать вокруг одной из своих осей, то получается поверхность, которую Лобачевский называет *предельной поверхностью* или *орисферой* (*предельной сферой*). Эту поверхность можно представить как сферу с бесконечно удаленным центром. Такая поверхность может

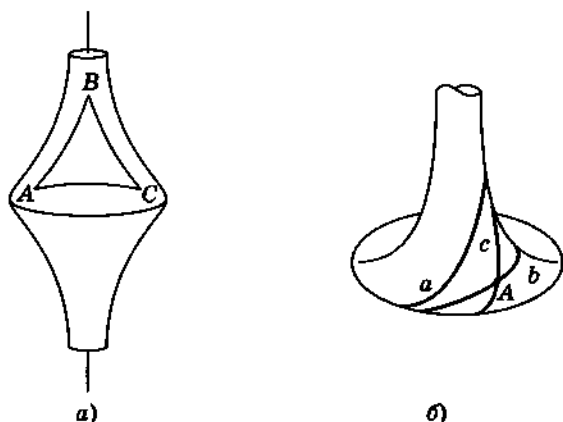


Рис. 306

скользить по самой себе; на ней можно строить внутреннюю геометрию. Лобачевский доказал, что на предельной поверхности выполняется обычная двумерная геометрия Евклида. Не странно ли: отказ от евклидовой геометрии на двумерной плоскости в пространстве Лобачевского порождает евклидову же геометрию на другой двумерной поверхности? Носителем этой евклидовой геометрии в гиперболическом (неевклидовом) пространстве является предельная поверхность (ее называют еще орисферой).

Это восстановление евклидовой планиметрии в неевклидовом пространстве имеет чрезвычайно большое значение. Используя факт существования евклидовой геометрии на предельной поверхности, Лобачевский приходит к тригонометрии прямоугольных треугольников в гиперболической плоскости, расположение которой он строит в «воображаемой геометрии», как ее называет Лобачевский, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию, развивает дифференциальное и интегральное исчисление. Он развивает созданную им геометрию до такого уровня, которого достигла до него в течение последних трех столетий классическая, «употребляемая» геометрия. И чем дальше шло это развитие новой геометрии, не наталкиваясь ни на какие противоречия, тем тверже крепла уверенность Лобачевского в ее незыблемости. Лобачевским была создана совершенно новая наука, принесшая новые идеи и факты, свидетельствующие о гениальности ее творца. Прецедента этому истории развития человеческого знания не имела.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде в семье небогатого чиновника. Вскоре, после смерти в 1797 г. отца, мать Лобачевского, Прасковья Ивановна Лобачевская, переехала в Казань. Ей удалось определить всех троих сыновей (Александра — 11 лет, Николая — 10 лет и Алексея — 7 лет) в Казанскую гимназию; Николай был зачислен в нее в 1802 г. В 1805 г. был открыт Казанский университет. Николай Лобачевский, получив под влиянием одного из лучших преподавателей Г. И. Карташевского глубокие знания по математике, поступил в Казанский университет



Николай Иванович
Лобачевский
(1792—1856)

в 1807 г. С этого момента и до конца дней жизнь Лобачевского была тесно связана с Казанским университетом.

На первых порах после поступления в университет заниматься математикой было не у кого (Г. И. Карташевский уже не работал в университете), и Лобачевский начал заниматься медициной. Но уже в январе 1808 г., после приезда высокообразованного математика — профессора М. Ф. Бартельса, Лобачевский оставил медицину и целиком отдался занятиям математикой. Бартельс занимался с Лобачевским на дому, и нет сомнения, что глубиной и разносторонностью математического образования Лобачевский во многом обязан Бартельсу. Одновременно он довольно серьезно изучал также физику и астрономию.

В 1814 г. Лобачевский был произведен в адъюнкты (ныне — доценты) университета, в 1816 г. он становится профессором, а в 1820 г. — деканом физико-математического отделения. В 1827 г. Н. И. Лобачевский — ректор Казанского университета. Об уважении, которое он себе завоевал в качестве ректора университета, свидетельствует то, что он избирался на этот пост шесть раз и занимал его без перерыва около двадцати лет (с 1827 по 1846 г.).

В 1846 г. исполнилось 30 лет со времени назначения Лобачевского профессором. Совет университета ходатайствует об оставлении Лобачевского на посту ректора, но он от этой чести отказался и подал в отставку.

Однако Лобачевский был назначен в том же году помощником попечителя Казанского учебного округа и в этой должности пробыл до 1855 г.

Один из курсов, которые Лобачевский читал студентам университета в начале своей преподавательской деятельности, был посвящен изложению элементарной геометрии. По-видимому, размышления, связанные с этим курсом, привлекли внимание Лобачевского к теории параллельных линий. Уже в 1823 г. Лобачевский понимал, что ни одно из предложенных доказательств пятого постулата не может быть признано удовлетворительным; тогда он еще не исключал возможности, что такое доказательство может быть найдено. Посвятив последующие годы размышлениям над этим вопросом, он приходит к полному решению проблемы, которую пытались разгадать в течение двух тысячелетий.

23 февраля 1826 г. Н. И. Лобачевский на заседании физико-математического факультета Казанского университета сделал доклад *«Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»*. Это был, по выражению профессора А. П. Котельникова, день рождения неевклидовой геометрии. В 1829 г. Лобачевский опубликовал в «Казанском вестнике» статью *«О началах геометрии»*, в которой продолжены исследования, изложенные в докладе *«Краткое изложение...»*. Затем последовал ряд других его мемуаров, развивающих решение проблемы параллельных линий: *«Воображаемая геометрия»* (1835), *«Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам»* (1836), *«Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»* (1835—1838), *«Геометрические исследования по теории параллельных»* (опубликованы впервые в 1840 г. в Берлине на немецком языке).

Однако новые идеи Лобачевского были настолько революционными и до того опередили свой век, что не могли быть поняты даже такими крупными математиками того времени, как академики М. В. Остроградский (1801—1861) и В. Я. Буняковский (1804—1889). Положительно оценил работы Лобачевского лишь профессор А. П. Котельников.

Новая геометрия не была признана современниками, напротив, она была встречена с полным равнодушием и даже с иронией. Неевклидову геометрию встретили враждебно, многие считали ее сплошной фантазией, а ее автора — чудаком и даже невеждой. В русской и немецкой печати появились статьи о работах Лобачевского, проникнутые издевательством и принесшие много горечи в жизнь гениального ученого.

Такое отношение к делу всей его жизни не могло не сказаться на здоровье Н. И. Лобачевского. Но одинокий Лобачевский не отказался от своих идей — он твердо был убежден в логической верности неевклидовой геометрии. Последнюю свою работу *«Пангеометрия»* (1855) он диктовал своим ученикам, будучи слепым. 24 февраля 1856 г. Н. И. Лобачевский скончался.

И в то же время, когда Лобачевский занимался созданием новой (неевклидовой) геометрии, выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс и гениальный венгерский мате-

матик Янош Больяи (Бойяи) (1802—1860), совершенно независимо друг от друга и от идей Лобачевского, пришли к такой же неевклидовой геометрии, что и Лобачевский. Однако «Appendix» Я. Больяи был издан лишь в 1832 г., через 3 года после выхода в свет статьи «О началах геометрии» Н. И. Лобачевского, а исследования Гаусса стали достоянием гласности лишь после его смерти, так как он не решился публично выступить в защиту новой геометрии. (Еще в 1818 г. Гаусс пришел к мысли о существовании наряду с евклидовой геометрией другой, неевклидовой геометрии. Но свои идеи опубликовать он побоялся: «...осы, вековое гнездо которых вы разрушаете, поднимутся над вашей головой...» — так он писал одному из молодых математиков, пытавшемуся публично выступить в пользу неевклидовой геометрии; к тому же, *результаты своих исследований и Лобачевский, и Я. Больяи посылали для отзыва великому Гауссу, но ответов ни одному из них он не отправил, хотя и высоко оценивал работу каждого из них.*)



Янош Больяи
(1802—1860)

Только в 60-х годах XIX столетия, когда была опубликована переписка Гаусса с его друзьями, ученые узнали, что Гаусс полностью разделял идеи Лобачевского и Больяи на неевклидову геометрию и сам пришел к тем же идеям. После известия о том, что Гаусс признал геометрию Лобачевского логически верной, «неевклидова геометрия» (названная так именно Гауссом) привлекла внимание математиков мира.

Противники неевклидовой геометрии были вынуждены окончательно признать право на ее существование после того, как Э. Бельтрами в 1868 г. нашел модель для планиметрии Лобачевского. Он показал, что существуют реальные тела, на поверхности которых выполняется планиметрия Лобачевского, что в евклидовом пространстве существуют объекты неевклидовой природы. А в 1870 г. модель геометрии Лобачевского была построена великим немецким математиком Феликсом Клейном. Существуют и другие модели-интерпретации геометрии Лобачевского.

Открытие геометрии Лобачевского имело огромное значение как для развития геометрии (*появились новые неевклидовы геометрии, в первую очередь, геометрия Римана*), так и для развития других естественно-научных дисциплин, способствующих более глубокому пониманию окружающего нас материального мира.

Значительный вклад в изучение и развитие геометрии Лобачевского в России внесли известные отечественные ученые в области геометрии Г. Б. Гуревич, Н. В. Ефимов, В. Ф. Каган, Б. Л. Лаптев, А. П. Норден, П. К. Рашевский, Б. А. Розенфельд, З. А. Скопец, И. М. Яглом и многие другие.

Огромный вклад по разработке геометрического наследия Н. И. Лобачевского внес один из основателей отечественной научной геометрической школы, один из крупнейших специалистов в учении об обосновании геометрии, а также в области неевклидовой геометрии, профессор МГУ **Вениамин Федорович Каган** (1869—1953).

В своей книге «Очерки по геометрии» (М., 1963, с. 240) В. Ф. Каган сказал: «В истории математики, в истории точного знания и философии Лобачевский всегда будет принадлежать к числу величайших основоположников наряду с Архимедом, Галилеем, Коперником и Ньютоном».



**Вениамин
Федорович Каган**
(1869—1953)

5.6. О сферической геометрии

Сферические прямые, отрезки, окружности

Сферическая геометрия, т. е. геометрия на сфере, имеет «*небесное*» происхождение: с геометрией на сфере люди столкнулись впервые в астрономии, при изучении видимой части «небесной» сферы, той небесной, воображаемой сферы, которая простирается над Землей и на которой нам представляются движения небесных тел.

Сферическая геометрия возникла в I в. н. э. после установления контакта между греческими и александрийскими геометрами и вавилонскими астрономами. Позже, с развитием

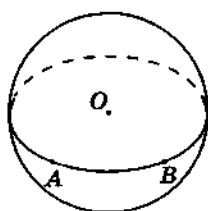


Рис. 307

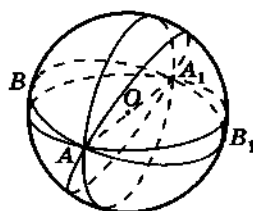


Рис. 308

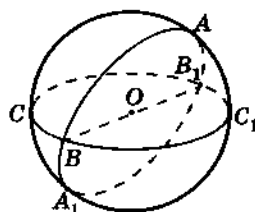


Рис. 309

мореплавания и географии, сферическую геометрию стали применять и к поверхности земного шара. В настоящее время плоская и сферическая геометрии широко применяются также в геодезии.

Что же изучает сферическая геометрия?

Роль точек в сферической геометрии играют любые точки сферы, роль прямых — большие окружности сферы.

Рассмотрим ряд аналогий и различий между плоской и сферической геометриями.

Любая большая окружность сферы является пересечением этой сферы и некоторой ее диаметральной плоскости. Так как через любые две точки сферы, не являющиеся ее диаметрально противоположными точками, можно провести единственную диаметральную плоскость, то через любые две точки сферы, не являющиеся диаметрально противоположными, проходит единственная большая окружность — прямая сферической геометрии (рис. 307). Однако если две точки сферы являются ее диаметрально противоположными точками, то через них можно провести бесконечное множество прямых сферической геометрии (рис. 308).

Более того, так как любые две диаметральные плоскости сферы пересекаются по прямой, содержащей центр сферы, то любые две большие окружности — прямые в сферической геометрии — пересекаются в двух точках, которые являются диаметрально противоположными точками сферы (рис. 309).

Так как плоскость делит пространство на два полупространства, а две пересекающиеся плоскости делят пространство на четыре области, то соответственно любая большая окружность делит сферу на две области — полусферы (см. рис. 307), а две большие окружности делят эту сферу на четыре области. На рисунке 309 изображены 4 области: ABB_1C ,

ABB_1C_1 , A_1BB_1C , $A_1BB_1C_1$. Наконец, так как три плоскости, пересекающиеся в одной точке, делят пространство на 8 областей, то три большие окружности, не пересекающиеся в одной точке, делят сферу на 8 областей (рис. 310).

В геометрии на сфере роль отрезка с концами в точках A и B играет меньшая из двух дуг проходящей через точки A и B большой окружности сферы (рис. 311). Длина этой дуги называется *расстоянием на сфере (сферическим расстоянием) между точками A и B* . Если точки A и B диаметрально противоположны, то отрезком AB считается любая полуокружность большого круга с концами A и B . Обозначив длину дуги AB символом дл. $\cup AB$, приходим к выводу: для сферического расстояния между точками A и B на сфере радиуса R выполняется дл. $\cup AB \leq \pi R$.

Если φ — величина центрального угла AOB в радианах (рис. 311), c — численная величина длины дуги AB , то

$$c = \varphi R \leq \pi R.$$

Роль окружности в геометрии на сфере радиуса R играет обычная окружность, но центрами ее считаются точки сферы — концы диаметра сферы, перпендикулярного плоскости этой окружности (рис. 312); радиусом сферической окружности является дуга большой окружности, проходящей через центр данной сферической окружности. Заметим, что у сферической окружности два центра, а ее длина изменяется в промежутке $[0; 2\pi R]$.

Таким образом, сферическая геометрия существенно отличается от евклидовой планиметрии уже тем, что сфера ограничена, а плоскость не ограничена; расстояния на сфере не превосходят длины большой полуокружности; любая прямая в геометрии на сфере имеет длину, равную длине большой окружности; в сферической геометрии не существует параллельных прямых.

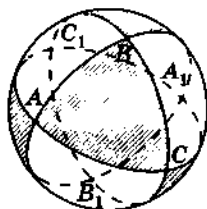


Рис. 310

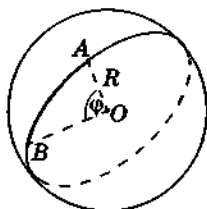


Рис. 311

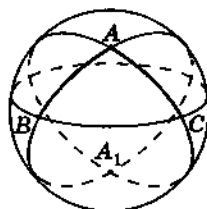


Рис. 312

Сферические углы, двуугольники, треугольники

Пусть A — одна из точек пересечения двух больших окружностей ω_1 и ω_2 сферы с центром O и радиусом R (рис. 313); γ — касательная плоскость к сфере в точке A ; α , β — диаметрально противоположные плоскости сферы, содержащие окружности соответственно ω_1 и ω_2 (плоскости α , β и γ на рис. 313 не изображены).

Так как $OA \perp \gamma$, то прямые a и b , по которым плоскости α и β соответственно пересекают плоскость γ , перпендикулярны общему радиусу OA окружностей ω_1 и ω_2 , поэтому являются касательными к этим окружностям в точке A .

Определение. Углом на сфере (сферическим углом) между большими окружностями называется угол между касательными к этим окружностям в точке их пересечения.

Вследствие перпендикулярностей $a \perp OA$, $b \perp OA$, приходим к выводу: величина угла между большими окружностями на сфере равна величине двугранного угла, грани которого содержат дуги этих окружностей.

В отличие от плоскости, где треугольник является многоугольником с наименьшим числом сторон, на сфере имеются двуугольники. Двуугольником является часть сферы, ограниченная двумя большими полуокружностями с общими концами; эти общие концы являются диаметрально противоположными точками сферы и называются *вершинами двуугольника* (рис. 314).

Если величина угла двуугольника с вершинами A и A_1 равна α радиан ($\alpha < \pi$), то отношение площади S этого двууголь-

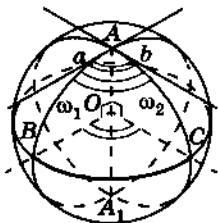


Рис. 313

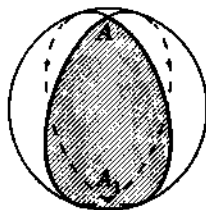


Рис. 314

ника к площади сферы радиуса R равно отношению $\alpha : 2\pi$, т. е. $S : 4\pi R^2 = \alpha : 2\pi$, откуда

$$S = 2\alpha R^2. \quad (1)$$

Возьмем на сфере радиуса R три точки A , B и C , не лежащие в одной плоскости с центром O сферы. Через каждую пару из этих точек проведем большую окружность и на каждой из них отметим наименьшую дугу, соединяющую точки A и B , B и C , C и A (рис. 315).

Отмеченные дуги ограничивают на сфере фигуру, которая называется **сферическим треугольником** ABC . Точки A , B и C называются **вершинами сферического треугольника**, $\cup AB$, $\cup BC$ и $\cup AC$ — его **сторонами**. Длины сторон сферического треугольника — **сферические расстояния между его вершинами**.

Пусть a , b , c — длины сторон (в радианах) сферического треугольника ABC ; α , β , γ — величины его углов соответственно A , B и C . Разность $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ называется **избытком сферического треугольника** и обозначается δ . Тогда площадь S сферического треугольника, расположенного на сфере радиуса R и имеющего углы α , β и γ , вычисляется по формуле:

$$S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 \quad \text{или} \quad S = \delta R^2.$$

В сферическом треугольнике имеют место теорема косинусов и теорема синусов, аналогичные одноименным теоремам стереометрии о трехгранных углах.

Рассмотрим сферический треугольник ABC со сторонами $a = \text{дл. } \cup BC$, $b = \text{дл. } \cup AC$, $c = \text{дл. } \cup AB$, расположенный на сфере с центром O и радиусом R . Пусть α , β , γ — радианные меры центральных углов соответственно BOC , AOC , AOB (рис. 316).

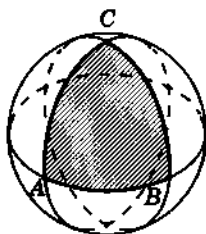


Рис. 315

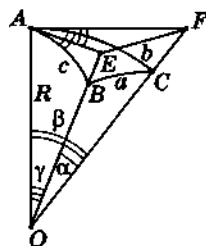


Рис. 316

Тогда для сферы единичного радиуса имеет место соотношение

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A. \quad (2)$$

Равенство (2) выражает сферическую теорему косинусов, которая обычно формулируется так: косинус одной стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других его сторон плюс произведение синусов этих сторон на косинус угла между ними.

Соотношение (3) выражает сферическую теорему синусов, которую формулируют так: синусы сторон сферического треугольника относятся, как синусы противолежащих углов:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (3)$$

! Замечание. В геометрии на сфере также выполняются теоремы о равенстве треугольников, о точках пересечения медиан и биссектрис треугольника и др. А все движения сферы, т. е. отображения сферы на себя, сохраняющие сферические расстояния между точками, порождаются движениями пространства, имеющими неподвижной точкой центр сферы.

5.7. О топологии

Топология — одна из самых молодых ветвей геометрии. Несмотря на большую геометрическую наглядность, лежащую в основе ее идей, топология является одним из самых абстрактных отделов современной математики. Основополагающей идеей в создании топологии является идея непрерывности.

Мы знаем, что евклидова геометрия изучает евклидовы свойства фигур, т. е. такие их свойства, которые сохраняются при всех движениях евклидова пространства. *Фигуры, преобразующиеся одна в другую при движении, называют равными.* Основным инвариантом движений является расстояние между любыми двумя точками.

Проективная геометрия изучает проективные свойства фигур, т. е. такие их свойства, которые сохраняются при проективных преобразованиях проективного пространства. *Фигуры, преобразующиеся одна в другую при проективном преобразовании, называют проективно эквивалентными.*

Основным инвариантом проективных преобразований является сложное отношение четырех коллинеарных точек.

Проективные свойства любой фигуры являются более общими и более прочными, чем ее евклидовы свойства: при проективных преобразованиях расстояние между точками не сохраняется, не сохраняется и простое отношение трех точек прямой. Иными словами, проективные преобразования сохраняют проективные свойства любой фигуры, но могут «разрушать» ее евклидовы свойства.

Оказалось, что существуют преобразования, «более сильные», чем проективные, т. е. преобразования, при которых проективные свойства фигур «разрушаются»: коллинеарные точки преобразуются в неколлинеарные точки, а следовательно, не сохраняется и сложное отношение четырех точек прямой. К таким преобразованиям относятся топологические или гомеоморфные преобразования.

Под топологическим преобразованием понимают любую деформацию фигуры, при которой не происходило бы ни разрывов (*сохранялось отношение бесконечной близости точек фигуры*), ни склеиваний ее с самой собой (*каждые две различные точки фигуры отображались бы в две различные точки ее образа при данной деформации*). К таким деформациям относятся любой изгиб, сжатие, расширение, изменение размеров и формы фигуры при условии, что с данной фигурой не происходит склеиваний и разрывов. *Свойства фигур, которые сохраняются при топологических преобразованиях, называют топологическими свойствами этих фигур или топологическими инвариантами* (от латинского слова *invariant* — неизменный). Предметом топологии является изучение топологических инвариантов геометрических фигур.

С математической точки зрения, топологическое (гомеоморфное) преобразование фигуры — такое ее преобразование, которое является взаимно однозначным и взаимно непрерывным. Это означает, что: а) две любые различные точки фигуры F отображаются в две различные точки ее образа — фигуры F' ; б) если точка M данной фигуры F отображается в точку M' фигуры F' , то любая точка X фигуры F бесконечно близкая к точке M , отображается в точку X' фигуры F' , также бесконечно близкую к точке M' .

Если фигура F топологически отображается на фигуру F' , то говорят, что эти фигуры топологически эквивалентны или гомеоморфны, т. е. с топологической точки зрения они не различимы.

На рисунке 317 окружность с помощью центрального проектирования из ее центра топологически отображается на треугольник и шестиугольник, а треугольник при этом же проектировании гомеоморфно отображается на шестиугольник. Это означает, что окружность гомеоморфна и треугольнику, и шестиугольнику, гомеоморфными являются и треугольник с шестиугольником. Аналогично, сферу можно гомеоморфно отобразить на поверхность куба и поверхность тетраэдра (топологически «превратить» сферу в куб и тетраэдр), а вместе с тем и поверхность тетраэдра — на поверхность куба (топологически «превратить» тетраэдр в куб). Это означает, что сфера, поверхность куба и поверхность тетраэдра — гомеоморфные пространственные фигуры. Однако окружность с помощью гомеоморфной деформации нельзя «превратить» ни в линию, имеющую форму восьмерки (рис. 318) (склеивание двух точек в одну нарушает условие взаимной однозначности отображения), ни в отрезок (разрыв окружности нарушает условие взаимной непрерывности отображения). Поэтому окружность, «восьмерка» и отрезок попарно не гомеоморфны.

Фигуры, изображающие буквы русского алфавита Г, Л, М, П, С, гомеоморфны между собой; гомеоморфными между собой являются и «фигуры» Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э, но ни одна из «фигур» второй группы не гомеоморфна ни одной из «фигур» первой группы; «фигура» О не гомеоморфна ни одной «фигуре», изображающей другие буквы русского алфавита.

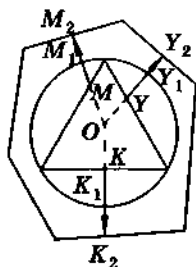


Рис. 317

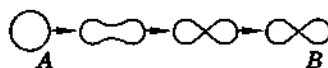


Рис. 318

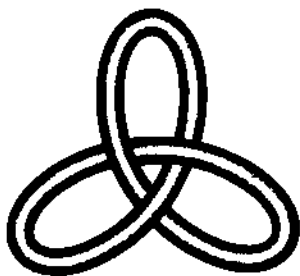


Рис. 319

Наглядно гомеоморфизм двух фигур можно представить себе, например, следующим образом: предположим, что две фигуры «изготовлены» из прочного эластичного материала (пленки); если, допуская любые растяжения, искривления (кручения) этих фигур без разрывов и без образования «складок» и «склеек», удастся одну из этих фигур «наложить» на другую, то эти фигуры гомеоморфны.

Следует заметить, что понятие гомеоморфного преобразования шире, чем понятие деформации. Например, если недеформированную окружность разрезать в какой-то точке, затем полученную линию как-то «заузлить» (рис. 319) без соприкосновения и снова заклеить в точке разреза, то получится замкнутая линия, гомеоморфная данной окружности; однако с помощью одной лишь деформации (изгибания, сжатия, расширения) ни одну из них в другую преобразовать невозможно.

Чтобы установить, гомеоморфны ли две фигуры, пользуются топологическими инвариантами. Мы уже убедились, что такие понятия, как «прямолинейность», «непрямолинейность» («криволинейность»), «число вершин» замкнутой линии (число граней замкнутой поверхности), не являются топологическими инвариантами. Значение же топологических инвариантов состоит в следующем: две фигуры F_1 и F_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда они обладают одними и теми же топологическими инвариантами. Чаще всего топологические инварианты выражаются в числах. Мы рассмотрим некоторые наиболее простые из них.

Буква $\mathbb{I}$ — фигура, состоящая из двух «кусков», из двух не связанных между собой частей (компонент), а буква $\mathbb{II}$ — из одной компоненты (связная фигура). Число компонент фигуры является простейшим топологическим инвариантом, значит, буквы $\mathbb{I}$ и $\mathbb{II}$ не гомеоморфны.

Другим топологическим инвариантом фигуры является число разбивающих точек. Разбивающей точкой фигуры называют такую ее точку, удаление которой, вместе с достаточно малой ее окрестностью, разбивает связную фигуру на от-

дельные компоненты. (Под окрестностью точки на плоскости понимают внутренность любого круга с центром в данной точке.) Заметим, что понятие «неразбивающая точка» также является топологическим инвариантом фигуры.

На фигуре восьмерки (рис. 320, а, б) разбивающей является лишь точка M ; окружность разбивающих точек не имеет; разбивающей точкой отрезка является любая его внутренняя точка. Мы вновь приходим к выводу: эти три фигуры не гомеоморфны.

Следующим топологическим инвариантом фигуры является индекс точки — число дуг фигуры, сходящихся в этой точке. (Дугой называют фигуру, гомеоморфную отрезку прямой.) На рисунке 321 изображена буква Ж: точка a имеет индекс 1, точка b — 2, точка c — 3, точка d — 4. С помощью понятия индекса точки легко доказать, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны (с помощью понятия разбивающей точки и числа компонент негомеоморфность букв Ю и Ф установить невозможно).

К топологическим инвариантам относится понятие уникурсальности фигуры: фигура, состоящая из конечного числа дуг, называется *уникурсальной*, если ее можно «нарисовать одним росчерком», т. е. пройти всю ее непрерывным движением, не проходя дважды одну и ту же дугу. Уникурсальность фигуры выражается через понятие индекса точки: оказывается, что фигура уникурсальна тогда и только тогда, когда она либо вовсе не содержит точек нечетного индекса, либо содержит ровно две такие точки.

Число измерений геометрической фигуры является топологическим инвариантом: нельзя топологически деформировать двумерный квадрат в трехмерный куб.

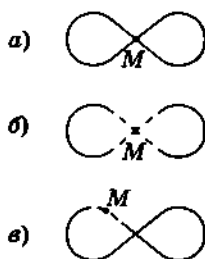


Рис. 320

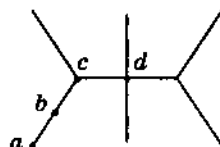


Рис. 321

Заметим, что любая непрерывная линия — одномерна (положение любой ее точки может быть задано при помощи одного параметра), поверхность — двумерна, тело — трехмерно.

Обратимся к вопросу топологии поверхностей.

Важным топологическим инвариантом поверхностей являются понятия связности и эйлеровой характеристики.

(О понятии связности см. главу «Многогранники» в этой книге.)

Остановимся кратко на эйлеровой характеристике поверхности.

Мы знаем, что для любого выпуклого многогранника, имеющего V вершин, G граней и P ребер, справедлива формула: $V - P + G = 2$; число, равное $V - P + G$, называют эйлеровой характеристикой многогранника. Из сказанного следует, что **эйлерова характеристика выпуклого многогранника равна 2**; доказано, что эйлерова характеристика выпуклого многогранника является его топологическим инвариантом.

Так как поверхность выпуклого многогранника гомеоморфна сфере, то **эйлерова характеристика сферы равна 2**.

Существуют многогранники, поверхность которых не гомеоморфна сфере. Для таких многогранников теорема Декарта—Эйлера не выполняется. Например, на рисунке 322 изображен многогранник, поверхность которого не гомеоморфна сфере, а гомеоморфна тору — поверхности, образованной вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее (рис. 322). Для этого многогранника $V = 16$, $P = 32$, $G = 16$, откуда $V - P + G = 0$, т. е. эйлерова характеристика этого многогранника равна нулю. Значит, и эйлерова характеристика тора равна 0. Поэтому тор и сфера не гомеоморфны. Но тор гомеоморфен «гире» (рис. 323, 324).

Таким образом, эйлерова характеристика любой поверхности, гомеоморфной сфере, равна 2 и является ее топологическим инвариантом; аналогично, эйлерова характеристика любой поверхности, гомеоморфной тору, равна 0 и является ее топологическим инвариантом.

Существуют поверхности, не гомеоморфные ни сфере, ни тору. Таковы, например, «сфера с ручками» и «крендель» (см. рис. 324).

Чрезвычайный интерес представляет поверхность, названная листом Мебиуса. Такое название получила эта поверхность в честь немецкого математика **Августа Фердинанда Мебиуса** (1790—1868), рассмотревшего эту поверхность и установившего, что она является односторонней.

Получается лист Мебиуса следующим образом. Длинная гибкая лента прямоугольной формы (рис. 325, а) один раз переворачивается (рис. 325, б), затем концы ее сближаются (рис. 325, в) и склеиваются. Полученная поверхность (рис. 325, г) и называется *листом Мебиуса*. Эта поверхность обладает рядом замечательных свойств. Отметим только два из них.

Лист Мебиуса является односторонней поверхностью. Это означает следующее: если начать красить «одну сторону» листа, допустим, в зеленый цвет, то, перемещая кисть по листу в одном направлении, мы, не переходя через края листа, придем в исходную точку, закрасив «обе стороны листа», т. е. закрасив весь лист одним зеленым цветом (рис. 326).



**Август Фердинанд
Мебиус**
(1790—1868)

Рис. 325

Рис. 326

Далее, лист Мебиуса не распадется на две отдельные поверхности, если совершить его разрез по средней линии, параллельной краю (убедитесь в этом самостоятельно и сравните с разрезанной по средней линии цилиндрической поверхностью, которая при этом распадется на две отдельные поверхности).

В заключение отметим, что к создателям топологии относятся Л. Эйлер (1707—1783), А. Пуанкаре (1854—1912), М. Фреше (1878—1973) и другие ученые. Как самостоятельная наука, топология существует немногим более века.

В XX в. важный вклад в развитие и изучение топологии внесли наши блестящие отечественные ученые П. С. Урысон (1898—1924), выдающиеся академики П. С. Александров (1896—1982), А. Н. Колмогоров (1903—1987), Л. С. Понтрягин (1908—1988) и многие их ученики, среди которых А. В. Архангельский, М. Ф. Бокштейн, В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин, В. А. Ефремович, Л. В. Келдыш, С. П. Новиков, Б. А. Пасынков, В. И. Пономарев, М. М. Постников, Е. Г. Скляренко, А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс и многие другие.

Павел Самуилович Урысон родился в 1898 г. в Одессе. Блестяще окончив в 1915 г. московскую частную гимназию, он в том же году поступил в МГУ на физико-математический факультет, предполагая стать физиком. Сначала юный Урысон проводил экспериментальные исследования о радиации рентгеновских трубок под руководством академика П. П. Лазарева,

в дальнейшем он увлекся математикой и по предложению академика Н. Н. Лузина становится его аспирантом.

Вследствие своего необычайно яркого математического таланта, кипучего темперамента, а также открытости и дружелюбия характера П. С. Урысон сразу попадает в самый центр сообщества молодых математиков, группировавшихся вокруг Н. Н. Лузина.

Павел Самуилович прекрасно владел всей математикой, и первые его работы относятся к интегральным уравнениям. Наряду с рядом работ, касающихся различных разделов математического анализа, П. С. Урысон создал в отечественной математике новую область — топологию.

Вот что писал академик П. С. Александров во вступлении к книге Л. Нейман «Радость открытия» (1972): «Основное место П. С. Урысона в истории советской математики определяется тем, что именно он является создателем советской топологии... В области топологии работы советских ученых, и в первую очередь работы самого П. С. Урысона, не только достигли, но во многих случаях превзошли работы зарубежных ученых».

В самом начале своего творческого пути П. С. Урысон трагически погиб: находясь в заграничной командировке, утонул, купаясь в Атлантическом океане, у берегов Бретани.

Павел Сергеевич Александров родился в 1896 г. в семье врача в г. Богородске Московской области. Уже в 14 лет он нашел в математике свое призвание, но, кроме того, хорошо знал и любил поэзию, театр, музыку. В 1913 г. Александров поступает на математическое отделение МГУ и вскоре становится близким учеником основоположника отечественной школы теории функций, академика Н. Н. Лузина (1883—1950).

В 1921—1924 гг. П. С. Александров вместе с П. С. Урысоном создают основы топологии, они вносят фундаментальный



**Николай
Николаевич Лузин**
(1883—1950)



**Павел Самуилович
Урысон**
(1898—1924)

вклад в теоретико-множественную топологию. С 1929 г. П. С. Александров — профессор МГУ, с 1932 г. он — президент Московского математического общества, а в 1953 г. П. С. Александров избирается действительным членом Академии наук СССР.

Павел Сергеевич — один из создателей отечественной топологической школы. Его научная деятельность отмечена высокими государственными наградами, он — лауреат Государственной премии СССР. Обладая огромным личным обаянием, высочайшей разносторонней культурой, П. С. Александров притягивал к себе молодых талантливых людей.

Лев Семенович Понтрягин — ученик академика П. С. Александрова — родился в 1908 г. Вот как отзывался учитель о своем ученике: «Л. С. Понтрягин, уже ранее зарекомендовавший себя несколькими блестящими работами, ...выступает как ученый, создавший свое собственное направление в математике и являющийся в настоящее время, бесспорно, самым крупным (в международном масштабе) представителем так называемой топологической алгебры, то есть совокупности вопросов, пограничных между алгеброй и топологией».

Сложен был путь Л. С. Понтрягина в математику. В 14 лет вследствие несчастного случая он лишился зрения. Лишь благодаря огромной воле, мужеству и упорному труду он успешно окончил школу и поступил на механико-математический факультет Московского университета. В эти трудные дни с ним рядом была его мать, вслух читавшая сыну учебники и научные статьи.

Топологическими проблемами Л. С. Понтрягин увлекся, посещая семинар П. С. Александрова, и в последствии посвятил им многие годы своей научной деятельности. В 1958 г. был издан его труд «Непрерывные группы», за который ему была присуждена Государственная пре-



Павел Сергеевич
Александров
(1896—1982)



Лев Семенович
Понтрягин
(1908—1988)

мия. Эта книга сразу была издана за рубежом. Л. С. Понтрягину и его ученикам, В. Г. Болтянскому и М. М. Постникову принадлежит ряд важнейших результатов по топологии многообразий.

Сильная тренированная память позволяла Л. С. Понтрягину справляться с громоздкими формулами и выражениями, не прибегая к бумаге. Им опубликовано более 150 работ. В 1958 г. Льва Семеновича избирают действительным членом Академии наук СССР.

Научная работа Л. С. Понтрягина сочеталась с преподавательской деятельностью. Им написаны учебники по дифференциальным уравнениям, а специально для школьников — ряд книг из серии «Знакомство с высшей математикой».

Плодотворная научная деятельность Л. С. Понтрягина отмечена высокими государственными премиями и наградами.

Андрей Николаевич Колмогоров родился 25 апреля 1903 г. в г. Тамбове. Мария Яковлевна Колмогорова умерла при рождении сына, и все заботы по его воспитанию взяла на себя ее родная сестра Вера Яковлевна Колмогорова, усыновившая его и действительно заменившая мать Андрею Николаевичу. И Андрей Николаевич отвечал своей «тетушке» (как он звал ее) глубокой любовью, как к своей матери, до самой ее смерти (1950). Отец Андрея Николаевича был агрономом с высшим специальным образованием.

Раннее детство Андрей Николаевич провел в родовом имении (под Ярославлем) своего деда по материнской линии. Вера Яковлевна старалась развить в ребенке с самых ранних лет любознательность, любовь к природе, наукам и чтению книг. «Радость математического «открытия» я познал рано, — писал Андрей Николаевич, — подметив в возрасте пяти лет закономерность: $1 = 1$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ и так далее».

В 1910 г., когда мальчику исполнилось семь лет, Вера Яковлевна переехала с ним в Москву. Она определила его в частную гимназию Евгении Альбертовны Репман, где он познакомился с Аней Егоровой, ставшей впоследствии его женой (1932). Математику в гимназии преподавали замечательные,



Андрей Николаевич
Колмогоров
(1903—1987)

творчески мыслящие педагоги. Вот одна из задач, которые маленький Андрей получал от своих учителей: *«Какой многоугольник получится, если рассечь куб плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно главной диагонали?»*

С 1920 г., после окончания гимназии, вся деятельность Андрея Николаевича неразрывно связана с Московским университетом. На первом курсе он посещает лекции Н. Н. Лузина по теории функций и А. К. Власова по проективной геометрии.

20—30 годы были счастливым временем для московских математиков: профессор МГУ, академик Николай Николаевич Лузин создал научную школу, являющуюся одной из самых великих в истории математики научных школ, которую выдающиеся ученые, сгруппировавшиеся вокруг ее создателя, называли «Лузитанией». Лузин читал курс комплексного переменного, и на его лекции собиралась почти вся Лузитания. Слушал эти лекции и юный Колмогоров.

О своем первом вступлении в научное сообщество Андрей Николаевич вспоминал: «С курсом Лузина связано мое первое достижение, после которого на меня было обращено некоторое внимание». Вскоре он был приглашен в эту школу самим Н. Н. Лузиным. Так начался новый этап в жизни А. Н. Колмогорова; по окончании университета он имел около пятнадцати печатных научных работ по теории функций действительного переменного.

С 1922 по 1925 г. Колмогоров параллельно с занятиями в университете работает учителем математики и физики в Потылихинской опытно-показательной школе Наркомпроса РСФСР. В школе он, кроме того, руководит кружком юных биологов.

В 1925 г. Колмогоров заканчивает Московский университет и становится аспирантом Н. Н. Лузина. Продолжая под руководством Лузина заниматься теорией функций действительного переменного, он начал совместно с еще одним учеником Н. Н. Лузина — А. Я. Хинчиным (1894—1959) — работать в области теории вероятностей, где впоследствии А. Н. Колмогоров стал общепризнанным мировым лидером.

Летом 1929 г. произошло важное событие в жизни А. Н. Колмогорова — начало его дружбы с Павлом Сергеевичем Алек-

сандровым, уникальной дружбы двух выдающихся математиков XX столетия, продолжавшейся почти 54 года — до дня смерти П. С. Александрова в 1982 г.

В 1931 г. А. Н. Колмогоров становится профессором МГУ, где он заведует кафедрой теории вероятностей. В 1933 г. выходит в свет его знаменитая монография «Основные понятия теории вероятностей», и он постепенно приобретает признание в качестве главы теории вероятностей во всем мире.

К 30-м и ранним 40-м годам относятся достижения А. Н. Колмогорова в теориях случайных процессов, турбулентности, алгебраической топологии, каждое из которых выдвигает его на первый план мировой науки.

С 1933 по 1939 г. и с 1950 по 1953 г. А. Н. Колмогоров был директором научного Института математики и механики при МГУ. С 1954 по 1956 г. и с 1978 г. по день своей кончины в 1987 г. А. Н. Колмогоров был заведующим Отделом математики механико-математического факультета МГУ, а с 1954 по 1958 г. — деканом этого факультета. С 1980 г. и до конца своей жизни А. Н. Колмогоров заведовал кафедрой математической логики МГУ.

В 1939 г. А. Н. Колмогорова избирают действительным членом Академии наук СССР. С этого времени он работает в Математическом институте им. Стеклова Академии наук СССР, где заведует отделом теории вероятностей, а с 1983 г. и до конца жизни — заведует отделом математической статистики и теории информации.

Во время Великой Отечественной войны А. Н. Колмогоров принял активное участие в разработке проблем, связанных с обороной Родины.

В 1953 г. А. Н. Колмогоров был избран почетным членом Московского математического общества, а в периоды 1964—1966 г. и 1973—1985 г. он являлся его Президентом, руководил обзорной секцией и редактировал один из журналов, издаваемых обществом.

В нашем очерке невозможно хоть сколько-нибудь полно коснуться основных достижений А. Н. Колмогорова в силу самого величия тех разделов математики, в развитие которых он внес фундаментальный вклад. Назовем некоторые из них: метрическая теория функций, дескриптивная теория множеств, математическая логика, теория вероятностей, геометрия, слу-

чайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, теоретико-множественная топология, алгебраическая топология, дифференциальные уравнения, теория турбулентности, теория стрельбы, теория алгоритмов и автоматов, динамические системы, классическая механика, теория суперпозиций функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей.

Немалая доля научных исследований Андрея Николаевича относится к области приложений в физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии. Кроме того, ряд его трудов посвящен вопросам педагогики, методики, стиховедения, философии, истории, естествознания.

А. Н. Колмогоров среди учащихся и преподавателей летней математической школы на Рубском озере, 1968 г.

Всего список (пока еще неполный) трудов А. Н. Колмогорова насчитывает около 500 работ.

В различных беседах и выступлениях Андрей Николаевич многократно обращал внимание на необходимость и специфичность работы с математически одаренными детьми. Выделяя при этом три группы специфической математической одаренности — алгоритмическую, геометрическую и логическую, он говорил, что многие его открытия были вызваны к жизни неожиданно возникшей геометрической картинкой. Андрей Николаевич был одним из крупнейших аналитиков и логиков своего времени, но своей геометрической интуицией он всегда гордился и считал, что способность к образному геометрическому мышлению можно и нужно развивать на задачах, подобных выше приведенной задаче о сечении куба.

В 1963 г. А. Н. Колмогоров выступает одним из инициаторов создания школы-интерната при МГУ (которая получила название «колмогоровской») и сам ведет там преподавание. До последних дней своей жизни Андрей Николаевич был занят делами интерната и заботами отечественной школы, отдавая им много сил и энергии. В 1966 г. А. Н. Колмогорова избирают действительным членом Академии педагогических наук СССР.

Андрея Николаевича Колмогорова нередко называли человеком Возрождения. Ему были присущи научная честность и объективность, скромность, отзывчивость, забота об учениках и готовность оказать им помощь. Он обладал чрезвычайным стремлением к самосовершенствованию, к созиданию себя как личности, гармонически развитой духовно и телесно (физически). Телесная (физическая) культура для него была такой же неотъемлемой частью внутреннего мира, как музыка и поэзия, как архитектура, живопись и другие виды искусств. Он был в замечательной физической форме, совершая трудные горные походы, преодолевая на лыжах по 40—50 километров. При этом Андрей Николаевич был увлечен интернатом при МГУ, реформой математического образования страны, организацией летних математических школ, музыкальных вечеров для юношества, чтением лекций для школьников и учителей, написанием и подготовкой к изданию учебников и учебных пособий.

А. Н. Колмогоров велик не только как математик, он — Великий Ученый в самом широком смысле этого слова. Среди учеников А. Н. Колмогорова академики В. И. Арнольд, И. М. Гельфанд, А. И. Мальцев, М. Д. Миллионщиков, С. М. Никольский, А. М. Обухов, Ю. В. Прохоров.

Многие университеты, академии и общества мира избрали А. Н. Колмогорова в число своих сочленов. Он был лауреатом многих международных и отечественных премий и удостоен многих самых высоких наград Родины.

А. Н. Колмогоров — наше национальное достояние.

Список использованной литературы

1. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX—X кл. — М.: Просвещение, 1983.
3. Игнациус Г. Ветви геометрии. — М.: Знание, 1963.
4. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. — М.: МГУ, 1963.
5. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. — М.: Гостехиздат, 1955.
6. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. — М.: Наука, 1991.
7. Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. М.: Наука, 1988.
8. Левитин К. Е. Геометрическая рапсодия. — М.: Знание, 1984.

9. Силин А. В., Шмакова Н. А. Открываем неевклидову геометрию. — М.: Просвещение, 1988.

10. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. От проективной геометрии — к неевклидовой. — М.: Просвещение, 1979.

6. Об аксиоматическом построении геометрии

Научная теория о свойствах фигур, расположенных в евклидовом пространстве, строится логическим (*дедуктивным*) методом на основе системы аксиом.

Суть аксиоматического метода построения геометрии состоит в следующем. Вводятся основные (*неопределяемые*) понятия — «фигуры» и формулируются основные положения (*аксиомы*), в которых выражены основные отношения между основными понятиями. Далее, используя основные понятия и основные отношения между ними, определяются новые понятия-фигуры, формулируются и доказываются новые предложения — *теоремы* — о свойствах введенных понятий. При этом доказательства теорем проводятся строго логическим путем на основе аксиом и ранее доказанных теорем. Таким образом, получается геометрическая система предложений, связанных целой сетью логических зависимостей.

К системе аксиом предъявляются следующие требования. Она должна быть:

1) *непротиворечивой*, т. е. чтобы из этой системы аксиом невозможно было получить логическим путем два взаимно исключающих друг друга предложения — некоторое утверждение и его отрицание;

2) *независимой*, т. е. чтобы ни одна из аксиом данной системы не являлась логическим следствием других ее аксиом;

3) *полной*, т. е. чтобы с помощью аксиом только этой системы, не добавляя новых аксиом, можно было доказать (или опровергнуть) строго логическим путем любое предложение о свойствах фигур данной геометрии.

Идея дедуктивного метода построения геометрии восходит еще к древнегреческому философу, ученику Сократа (469—399 гг. до н. э.), Платону (422—347 гг. до н. э.). К действительным же родоначальникам научной теории логического вывода относят ученика Платона, древнегреческого мыслителя Аристотеля (384—322 гг. до н. э.).

Применительно к геометрии идеи Аристотеля были реализованы древнегреческим математиком Евклидом (III в. до н. э.) в его трактате по геометрии «Начала». В течение 2000 лет это творение Евклида служило единственным руководством, по которому обучали геометрии; от него шли и все замыслы дальнейшего, более совершенного обоснования геометрии.

А система аксиом Евклида нуждалась в усовершенствовании: система сформулированных им аксиом (постулатов) была неполной, поэтому нередко доказательства «грешили» обращением к наглядности.

Кропотливый труд многих поколений математиков мира позволил создать научный, аксиоматический метод построения геометрии. Великая роль в этом принадлежит крупнейшим немецким математикам Феликсу Клейну (1849—1925) и Давиду Гильберту (1862—1943).

В 1899 г. появились в издании «Основания геометрии» («Grundlagen der Geometrie») Гильберта, где он сконструировал аксиоматику геометрии так, что логическая структура геометрии стала совершенно прозрачной.



Давид Гильберт
(1862—1943)

6.1. О построении трехмерной евклидовой геометрии по Гильберту

В геометрической системе Гильберта рассматриваются основные объекты трех родов: «точки», «прямые» и «плоскости», а также основные отношения между ними: «принадлежит», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный». Для этих объектов и отношений между ними не дается никаких прямых определений, но, вместе с тем, можно сказать, что они характеризуются посредством системы аксиом.

Под «точками», «прямыми» и «плоскостями» и под отношениями «принадлежит», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный» можно понимать все, что угодно, лишь бы они удовлетворяли следующей системе основных положений — аксиом, разделенных на пять групп.

Первая группа аксиом: аксиомы принадлежности

Аксиомы этой группы устанавливают отношение принадлежности между точками, прямыми и плоскостями и утверждают следующее.

I_1 . Для любых двух точек A и B существует прямая a , проходящая через каждую из этих точек.

I_2 . Для любых двух точек A и B существует не более одной прямой, проходящей через каждую из этих точек.

I_3 . На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4 . Для любых трех точек A , B и C , не лежащих на одной прямой, существует плоскость α , проходящая через каждую из этих точек. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

I_5 . Для любых трех точек A , B и C , не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих точек.

I_6 . Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α , то всякая точка прямой a лежит в плоскости α .

I_7 . Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют по крайней мере еще одну общую точку B .

I_8 . Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Аксиомы I_{1-3} можно назвать **плоскостными аксиомами**, а аксиомы I_{4-8} — **пространственными аксиомами** этой группы.

Вторая группа аксиом: аксиомы порядка

Аксиомы этой группы определяют понятие «между» и делают возможным установить **порядок** точек на прямой, плоскости и в пространстве. Они утверждают следующее.

II_1 . Если точка B лежит между точкой A и точкой C , то A , B , C суть три различные точки, и B лежит между C и A .

II_2 . Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B .

II_3 . Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

II₄ (аксиома Паша). Пусть A, B, C — три различные точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC , не проходящая ни через одну из точек A, B, C ; если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB , то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC .

Третья группа аксиом: аксиомы конгруэнтности

Эти аксиомы определяют понятие конгруэнтности и тем самым понятие движения. Отрезки находятся в некотором соотношении друг с другом; для обозначения этого соотношения служат слова «конгруэнтный» или «равный».

III₁. Если A и B суть две точки на прямой a и A' — точка на той же прямой или на другой прямой a' , то всегда можно найти точку B' , лежащую по данную от точки A' сторону прямой a' , и притом такую, что отрезок AB конгруэнтен, иначе говоря, равен отрезку $A'B'$.

Конгруэнтность отрезка AB отрезку $A'B'$ обозначается следующим образом:

$$AB \equiv A'B'.$$

Эта аксиома дает возможность откладывать отрезки, равные данным.

III₂. Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB , то отрезок $A'B'$ конгруэнтен также и отрезку $A''B''$, короче говоря, если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны также друг другу.

III₃. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a , не имеющие ни одной общей точки, и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a' , также не имеющие ни одной общей точки; если при этом $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то и $AC \equiv A'C'$.

Эта аксиома дает возможность складывать отрезки.

Определение. Пусть α — произвольная плоскость, а h и k — какие-то ее два луча, различные, исходящие из одной и той же точки O и принадлежащие различным прямым. Систему двух лучей h, k называем углом и обозначаем ее так: $\angle(h; k)$ или $\angle(k; h)$. Лучи h, k называются сторонами угла, а точка O — вершиной угла.

Углы находятся в определенном соотношении один к другому, для обозначения которого служат слова «конгруэнтен» или «равен».

III₄. Пусть дан $\angle(h; k)$ в плоскости α и прямая a' в плоскости α' , а также вполне определенная по отношению прямой a' сторона плоскости α' . Пусть h' обозначает луч прямой a' , исходящий из точки O' ; в таком случае в плоскости α' существует один и только один луч k' , обладающий следующим свойством: $\angle(h; k)$ конгруэнтен, иначе говоря, равен $\angle(h'; k')$, и вместе с тем все внутренние точки $\angle(h'; k')$ находятся в плоскости α' , по данную сторону от прямой a' . Конгруэнтность угла $\angle(h; k)$ углу $\angle(h'; k')$ обозначают так: $\angle(h; k) \equiv \angle(h'; k')$. Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е. всегда $\angle(h; k) \equiv \angle(h; k)$.

III₅. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то имеет место также и конгруэнтность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Аксиомы III₁₋₃ называют линейными аксиомами группы III, а аксиомы III₄₋₅ — плоскостными аксиомами этой группы.

Четвертая группа аксиом: аксиома о параллельных

Аксиома о параллельных:

IV (Аксиома Евклида). Пусть a — произвольная прямая, а A — точка, лежащая вне ее; в таком случае в плоскости, определяемой прямой a и точкой A , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

Эту прямую назовем прямой, параллельной прямой a , проходящей через точку A .

Пятая группа аксиом: аксиома непрерывности

Пятая группа аксиом у Гильберта состоит из двух аксиом непрерывности: аксиомы Архимеда и аксиомы полноты. Вместо них можно ввести эквивалентную им аксиому Дедекинда.

V (Аксиома Дедекинда). Если все точки отрезка AB , включая и его концы, распределены на два класса так, что: 1) каждая точка отрезка принадлежит одному и только одному из этих классов, точка A принадлежит первому классу, а точка B — второму классу; 2) каждая точка первого класса, отличная от A , лежит между A и любой точ-

кой второго класса, то на отрезке AB существует одна и только одна такая точка C , что всякая точка, лежащая между A и C , принадлежит первому классу, а всякая точка, лежащая между C и B , принадлежит второму классу. Сама точка C принадлежит либо первому, либо второму классу.

На основании системы аксиом Гильберта и было осуществлено дедуктивное построение геометрии трехмерного евклидова пространства.

6.2. Об обосновании трехмерной евклидовой геометрии по Вейлю

Существует другое, точечно-векторное аксиоматическое построение геометрии трехмерного евклидова пространства, основоположником которого является немецкий математик Герман Вейль (1885—1955).

В системе аксиом Вейля основными являются понятия «точка» и «вектор». При этом предполагается непротиворечивой теория действительного числа.

На множестве всех «векторов», обозначаемых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., и множестве всех «точек», обозначаемых A , B , C , ..., вводятся основные отношения — операции.

I. Операция сложения векторов, при которой любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно сопоставляется некоторый вектор, который называется их суммой и обозначается через $\vec{a} + \vec{b}$.

Операция сложения векторов удовлетворяет следующим аксиомам (свойства суммы векторов).

I_1 . Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (сложение коммутативно).

I_2 . Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливо равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (сложение ассоциативно).

I_3 . Существует такой вектор $\vec{0}$ (нулевой вектор), что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.

I_4 . Для любого вектора $\vec{b}$ существует противоположный вектор $-\vec{b}$, обладающий следующим свойством: $\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$.

II. Операция умножения вектора на действительное число, при которой любому вектору $\vec{a}$ и любому действительному числу k однозначно сопоставляется некоторый вектор, который называется произведением вектора $\vec{a}$ на число k и обозначается через $k\vec{a}$.

Операция умножения вектора на число удовлетворяет следующим аксиомам, справедливым для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\Pi_1. (k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}.$$

$$\Pi_2. k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

$$\Pi_3. k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}.$$

$$\Pi_4. 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Аксиомы Π_1 и Π_2 выражают дистрибутивные (распределительные) свойства операции умножения вектора на число, аксиома Π_3 — ассоциативное (сочетательное) свойство.

III. Операция скалярного умножения векторов, при которой любым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно сопоставляется некоторое число, называемое их *скалярным произведением* и обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

Операция скалярного умножения векторов удовлетворяет следующим аксиомам, справедливым для любого числа $k \in R$ и любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\text{III}_1. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ для любых векторов } \vec{a} \text{ и } \vec{b}.$$

$$\text{III}_2. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ для любых векторов } \vec{a}, \vec{b} \text{ и числа } k \in R.$$

$$\text{III}_3. \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ для любых векторов } \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c}.$$

$$\text{III}_4. \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ для любого } \vec{a} \neq \vec{0}.$$

IV. Отношение принадлежности упорядоченной пары точек и вектора, при котором любой упорядоченной паре точек A и B ставится в соответствие единственный вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

Отношение принадлежности упорядоченной пары точек и вектора удовлетворяет следующим аксиомам, справедливым для любых точек $A, B, C, \dots$ и любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$.

IV₁. Для любого вектора $\vec{a}$ и любой точки B существует единственная точка C такая, что $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ (т. е. от любой точки можно отложить единственный вектор, равный данному. Эту аксиому называют аксиомой откладывания вектора от точки).

$$\text{IV}_2. \text{ Если } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AK}, \text{ то } M = K.$$

IV₃ (правило трех точек). Для любых трех точек A, B, C справедливо равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Кроме того, во множестве векторов выполняются следующие аксиомы размерности.

V_1 . Существует по крайней мере одна тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такая, что ни один из них не выражается через два других, т. е. соотношение $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c} = \vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $k = m = n = 0$.

Множества всех векторов и точек с введенными в них отношениями $I-IV$, удовлетворяющими аксиомам I_1-I_4 , II_1-II_4 , III_1-III_4 , IV_1-IV_3 , V_1 , называются **трехмерным евклидовым пространством** и обозначаются E_3 .

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, для которых выполняется аксиома V_1 , называется **базисом трехмерного евклидова пространства**.

V_2 . Если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образует базис пространства E_3 , то для любого четвертого вектора $\vec{r}$ этого пространства существует единственная тройка чисел x , y , z , такая, что выполняется равенство $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{r}$, т. е. всякий вектор пространства можно единственным образом разложить в данном базисе.

V_3 . В пространстве существует по крайней мере одна точка, т. е. пространство не является пустым.

На основе системы аксиом Вейля можно построить ту же самую евклидову геометрию, что и на основании системы аксиом Гильберта.

Заметим, что при построении евклидовой геометрии «по Гильберту» понятия «прямая» и «плоскость» являются основными понятиями, в то время как при построении евклидовой геометрии «по Вейлю» эти понятия определяются.

Определение. Пусть A — любая точка, $\vec{p}$ — любой ненулевой вектор. Множество всех точек M , для которых $\overrightarrow{AM} = k\vec{p}$, $k \in R$, называется **прямой**, проходящей через точку A и имеющей $\vec{p}$ своим базисным вектором; эта прямая обозначается через $(A; \vec{p})$. Точка A при этом называется **начальной точкой** прямой $(A; \vec{p})$.

Определение. Пусть A — любая точка, $\vec{p}$, $\vec{q}$ — два любых неколлинеарных вектора. Множество всех точек M , для которых $\overrightarrow{AM} = k\vec{p} + m\vec{q}$, $k, m \in R$, называется **плоскостью**, проходящей через точку A и имеющей пару $\vec{p}$, $\vec{q}$ своим базисом; эта плоскость обозначается через $(A; \vec{p}; \vec{q})$. Точка A при этом называется **начальной точкой** плоскости $(A; \vec{p}; \vec{q})$.

Пользуясь введенными определениями прямой и плоскости, доказываем, что: на прямой (плоскости) имеется бесконечно много точек; через две точки можно провести лишь одну прямую, а через три точки, не лежащие на одной прямой, — лишь одну плоскость; на плоскости через точку, лежащую вне прямой, можно провести лишь одну прямую, не пересекающую данную прямую.

Далее последовательно вводятся определения различных плоских и пространственных фигур и дедуктивным методом изучаются их геометрические свойства.

Большой вклад в вопросы развития и изучения дедуктивного метода построения евклидовой и неевклидовой геометрий на основании различных систем аксиом в России внесли А. Д. Александров, Л. С. Атанасян, В. Г. Болтянский, В. Ф. Каган, А. Н. Колмогоров, А. В. Погорелов, З. А. Скопец, И. М. Яглом и многие другие.

Те из вас, кто посвятит себя в дальнейшем изучению вопросов оснований геометрии, будут самым подробным образом изучать приведенные выше и другие системы аксиом. В нашем же учебнике мы ни коим образом не ставим себе целью дать «строгое» аксиоматическое построение евклидовой стереометрии.



ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Список основных теорем, изучаемых в 11 классе

Теорема 1. Композиция двух движений пространства есть движение.

Теорема 2. Движение пространства отображает:

- а) отрезок на равный ему отрезок;
- б) прямую на прямую;
- в) луч на луч;
- г) треугольник на равный ему треугольник;
- д) плоскость на плоскость;
- е) полуплоскость на полуплоскость;
- ж) тетраэдр на равный ему тетраэдр;
- з) полупространство на полупространство.

Теорема 3. При центральной симметрии пространства:

- 1. а) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя;
- б) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую;
- 2. а) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя;
- б) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость.

Теорема 4. Поворот вокруг оси есть движение.

Теорема 5. Всякое движение пространства есть композиция не более четырех симметрий относительно плоскости.

Теорема 6. При гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками изменяется в $|k|$ раз.

Теорема 7. При гомотетии плоскость отображается на параллельную ей или совпадающую с ней плоскость.

Теорема 8. Подобие с коэффициентом k можно разложить в композицию движения и гомотетии с некоторым центром и тем же коэффициентом.

Теорема 9 (теорема Декарта—Эйлера для выпуклого многогранника). Для любого выпуклого многогранника сумма числа вершин B и числа граней Γ на две единицы больше числа его ребер P , т. е. справедлива формула $B - P + \Gamma = 2$.

Теорема 10. Плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику.

Теорема 11. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания призмы на боковое ребро.

Теорема 12. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро.

Теорема 13. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

Теорема 14. Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения призматической поверхности на боковое ребро.

Теорема 15. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины.

Теорема 16. В трехгранном угле величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

Теорема 17. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды.

Теорема 18. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ , и высота пересекает основание, то $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}$.

Теорема 19. Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то: 1) боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части; 2) в сечении получается многоугольник, подобный основанию; 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

Теорема 20. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.

Теорема 21. Объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Теорема 22. Объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Теорема 23. Объем усеченной пирамиды, у которой площади оснований равны S_1 и S_2 , а высота — H , вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Теорема 24. Существует пять различных (с точностью до подобия) правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.

Теорема 25. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.

Теорема 26. Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Теорема 27. Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то:

- 1) все образующие и высота конуса делятся этой плоскостью на пропорциональные части;
- 2) в сечении получается круг, подобный основанию;
- 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

Теорема 28. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

Теорема 29 (о пересечении шара и сферы с плоскостью).

- 1) Если расстояние от центра шара до данной плоскости меньше радиуса шара, то пересечением шара с плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара на плоскость, или сам центр шара, если плоскость проходит через этот центр. Пересечением сферы с плоскостью является окружность указанного круга. Радиус r сечения в этом случае

равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, а d — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2) Если расстояние от центра шара до данной плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку.

3) Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса, то плоскость не имеет с шаром общих точек.

Теорема 30. Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Теорема 31. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Формулы планиметрии

Треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = a + b + c$ $p = \frac{a + b + c}{2}$	a, b, c — длины сторон; p — полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180^\circ$	A, B, C — величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	a, b, c — длины сторон; A, B, C — величины углов
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности (R)	$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c;$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B =$ $= \frac{1}{2} bc \sin A;$ $S = pr;$ $S = \frac{abc}{4R}$	a, b, c — длины сторон; h_a, h_b, h_c — длины высот; A, B, C — величины углов; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Формула Герона	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	a, b, c — длины сторон; m_a — длина медианы к стороне a ;
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	m, n — длины отрезков, на которые биссектриса угла C делит сторону c ;
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	h_a, h_b, h_c — длины высот; r — радиус вписанной окружности
Отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, имеющих равные углы с вершинами A и A_1	$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$	S_{ABC} и $S_{A_1B_1C_1}$ — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

Прямоугольный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90^\circ$	A, B — величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	a, b — длины катетов; c — длина гипотенузы;
Метрические соотношения	$h_c^2 = a_1 \cdot b_1$; $a^2 = c \cdot a_1, b^2 = c \cdot b_1$	h_c — длина высоты; a_1, b_1 — длины проекций катетов на гипотенузу;
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}; r = \frac{a + b - c}{2}$; $r = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$; $R + r = \frac{1}{2}(a + b)$	r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ab$	

Правильный треугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 3a$	a — длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60^\circ$	A, B, C — величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	h — длина высоты; a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}; R = 2r;$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади (S) через: сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4};$ $S = 3r^2\sqrt{3}$	a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности

Четырехугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма углов	$A + B + C + D = 360^\circ$	A, B, C, D — величины углов; A, C и B, D — величины пар противоположных углов
Свойство сумм величин противоположных углов вписанного четырехугольника	$A + C = B + D = 180^\circ$	
Свойство сумм длин противоположных сторон описанного четырехугольника	$a + c = b + d$	a, c и b, d — длины пар противоположных сторон; m, n — длины диагоналей
Теорема Птолемея	$mn = ac + bd$	

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2} mn \sin \varphi;$ $S = pr$	m, n — длины диагоналей; φ — величина угла между ними; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности

Параллелограмм

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 2(a + b)$	a, b — длины сторон; m, n — длины диагоналей; h_a, h_b — длины высот; B — величина угла между сторонами; m, n — длины диагоналей; φ — величина угла между диагоналями
Соотношение между квадратами длин сторон и диагоналей	$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$	
Площадь (S)	$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b;$ $S = ab \sin B;$ $S = \frac{1}{2} mn \sin \varphi$	
Свойства углов	$A + B + C + D = 360^\circ;$ $A = C; B = D;$ $A + B = B + C = 180^\circ$	A, B, C, D — величины углов

Прямоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 2(a + b)$	a, b — длины сторон; d — длина диагонали; φ — величина угла между диагоналями
Площадь (S)	$S = ab;$ $A = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$	

Ромб

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр	$P = 4a$	a — длина стороны; h — длина высоты;
Площадь (S)	$S = ah; S = \frac{1}{2} mn$	m, n — длины диагоналей

Квадрат

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Углы	$A = B = C = D = 90^\circ$	A, B, C, D — величины углов
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a = R\sqrt{2}; R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	a — длина стороны; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$r = \frac{a}{2}; a = 2r$	
Площадь (S)	$S = a^2; S = 2R^2$	

Трапеция

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Свойство средней линии	$m = \frac{a+b}{2}$	m — длина средней линии; a, b — длины оснований;
Площадь (S)	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$ $S = m \cdot h$	h — длина высоты

Правильный многоугольник

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма внутренних углов (Σ)	$\Sigma = (n - 2) \cdot 180^\circ$	n — число сторон; A — величина угла; a_n — длина стороны; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности
Угол	$A = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$	
Связь между длиной стороны и радиусом вписанной окружности	$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n};$ $r = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	
Связь между длиной стороны и радиусом описанной окружности	$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$ $a_3 = R\sqrt{3}; a_4 = R\sqrt{2};$ $a_6 = R$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2} arn;$ $S = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}$	a — длина стороны; n — число сторон; r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности

Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности (C)	$C = 2\pi R$	R — радиус окружности; n — градусная мера дуги; φ — радианная мера дуги; d — диаметр; b — основание сегмента; h — высота сегмента
Длина дуги (l)	$l = \frac{\pi R n}{180}; l = \varphi R$	
Площадь круга (S)	$S = \pi R^2; S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	
Площадь сегмента (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \pm S_{\Delta};$ $S = \frac{2}{3} bh$	

Тригонометрические тождества

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha; & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha; & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; & \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \\ & & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha; & & \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha; \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha; \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sin^2 \alpha; \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент			
	$90^\circ + \alpha$	$90^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$

Окончание

Функция	Аргумент			
	$90^\circ + \alpha$	$90^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

Функция	Аргумент			
	$180^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Значения тригонометрических функций
некоторых углов

Функция	Величина угла							
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Формулы стереометрии

Векторы и координаты

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Правило треугольника	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	A, B, C — произвольные точки
Правило параллелограмма	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$	$OACB$ — параллелограмм
Правило многоугольника	$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$	$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ — произвольные точки
Правило параллелепипеда	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1}$	OA, OB, OC — ребра параллелепипеда; OC_1 — диагональ параллелепипеда
Формула вычитания	$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$	A, B, O — произвольные точки
Признак коллинеарности двух ненулевых векторов	$\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ $ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} $	k — число, отличное от нуля, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$
Признак компланарности трех векторов	$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$	x, y — числа
Середина отрезка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	M — середина отрезка AB ; O — произвольная точка

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Точка пересечения медиан (центроид)	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$	M — центроид треугольника ABC ; O — произвольная точка
Скалярное произведение векторов	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$	$\vec{a}, \vec{b}$ — ненулевые векторы
Сложение и вычитание векторов в координатах	$\vec{a} \pm \vec{b} (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1);$ $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$
Умножение вектора на число	$k\vec{a}(kx; ky; kz)$	k — число; $\vec{a}(x; y; z)$
Скалярное произведение	$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a}(x_1; y_1; z_1);$ $\vec{b}(x_2; y_2; z_2);$ φ — величина угла между векторами
Косинус угла между векторами	$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$	
Длина вектора	$ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\vec{a}(x; y; z)$
Расстояние между точками A и B	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1);$ $B(x_2; y_2; z_2)$
Уравнение плоскости	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$\vec{a}(A; B; C)$ — вектор, перпендикулярный плоскости; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, принадлежащая плоскости

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$	$M(x; y; z)$ — произвольная точка плоскости
Косинус угла между двумя плоскостями	$\cos \varphi = \frac{ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	φ — величина угла между этими плоскостями; $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — плоскости
Условие перпендикулярности двух плоскостей	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	
Условие параллельности двух плоскостей	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	
Расстояние от точки до плоскости (d)	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	$M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка; $Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость
Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{p}; \\ x = x_0 + ka_1, \\ y = y_0 + ka_2, \\ z = z_0 + ka_3 \end{cases}$	$\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0$ — радиус-вектор данной точки прямой; $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой; k — параметр; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — данная точка прямой; $M(x; y; z)$ — произвольная точка прямой; $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$ — направляющий вектор прямой

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Уравнения прямой по двум ее точкам Косинус угла между двумя прямыми	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ $\cos \varphi = \frac{ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 }{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$	$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ — данные точки; $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{p}_2(b_1; b_2; b_3)$ — направляющие векторы прямых; φ — величина угла между ними
Условие перпендикулярности двух прямых Условие параллельности двух прямых	$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$	
Синус угла между прямой и плоскостью Условие параллельности прямой и плоскости Условие перпендикулярности прямой и плоскости	$\sin \varphi = \frac{ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ $\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$	$Ax + By + Cz + D = 0$ — плоскость; $\vec{p}(a_1; a_2; a_3)$ — направляющий вектор прямой; φ — величина угла между прямой и плоскостью

Многогранники

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба (S)	$S = 6a^2$	a — длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = P \cdot h$	P — периметр основания; h — высота (длина бокового ребра)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = P \cdot l$	P — периметр перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = P \cdot l$	P — периметр основания; l — длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_{\text{бок}} = \frac{Q}{\cos \varphi}$	P — периметр основания; a — апофема; Q — площадь основания; φ — величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	P, P_1 — периметры оснований; h — апофема
Объем куба (V)	$V = a^3$	a — длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = abc$	a, b, c — измерения параллелепипеда

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{\text{осн}} \cdot h;$ $V = Q \cdot l$	$S_{\text{осн}}$ — площадь основания; h — высота; Q — площадь перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	$S_{\text{осн}}$ — площадь основания; h — высота
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} h (Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$	Q_1, Q_2 — площади оснований; h — высота
Отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, имеющих равные трехгранные углы с вершинами A и A_1	$\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} =$ $= \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_1D_1}$	V_{ABCD} и $V_{A_1B_1C_1D_1}$ — объемы тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot h$	R — радиус основания; h — высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{\text{полн}}$)	$S_{\text{полн}} = 2\pi R(h + R)$	R — радиус основания; h — высота

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = \pi Rl$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ($S_{\text{полн}}$)	$S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$	R — радиус основания; l — длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{\text{бок}}$)	$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r)$	R, r — радиусы оснований; l — длина образующей
Площадь сферы (S)	$S = 4\pi R^2$	R — радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус сферы; H — высота сегментной поверхности
Площадь шарового пояса (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R — радиус шара; H — высота шарового пояса
Площадь поверхности шарового сектора (S)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	R — радиус шара; h — высота шарового сектора
Объем цилиндра (V)	$V = \pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем конуса (V)	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$	R — радиус основания; H — высота
Объем усеченного конуса (V)	$V = \frac{1}{3} \pi H(r^2 + Rr + R^2)$	R, r — радиусы оснований; H — высота

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем шара (V)	$V = \frac{4}{3}\pi R^3; V = \frac{1}{6}\pi d^3$	R — радиус шара; d — диаметр шара
Объем шарового слоя (V)	$V = \frac{\pi H}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	r_1, r_2 — радиусы оснований шарового слоя; H — высота
Объем шарового сегмента (V)	$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$ $V = \frac{\pi H}{6}(3r^2 + H^2)$	R — радиус шара; H — высота; r — радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot H$	R — радиус шара; H — высота

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Апофема

- правильной пирамиды 114
- правильной усеченной пирамиды 121

Большая окружность сферы 187

Большой круг шара 171, 176

Вершина

- конуса 154
- многогранника 71
- многогранного угла 104
- пирамиды 109, 111
- призмы 71
- трехгранного угла 104

Взаимное расположение сферы и плоскости 175

Виды

- движений 50
- отображений 17
- параллелепипедов 96
- пирамид 109, 110, 112
- правильных многогранников 128
- призм 84

Винтовое движение 38, 47

Внутренняя точка фигуры 66, 68

Высота

- параллелепипеда 100
- пирамиды 110
- призмы 86
- тетраэдра 125
- усеченного конуса 165
- усеченной пирамиды 121
- цилиндра 143
- шарового сегмента 185
- шарового слоя 185

Грань

- многогранника 71

- параллелепипеда 95

- пирамиды 109

- призмы 85

Гомотетия в пространстве 55

Движения в пространстве 17

- в координатах 32, 35
- первого и второго рода 22, 23, 33, 36, 52

Диагональ многогранника 71

Диаметр

- основания цилиндра 145
- сферы 187
- шара 170

Единица объема 81

Изображение

- конуса 159
- цилиндра 146
- сферы 171
- шара 171

Кавальери принцип 82

Касательная плоскость к конусу 158

- — — цилиндру 146

- — — сфере 179

- — — шару 179

Конус 154

Композиция

- движений 14
- преобразований 12
- симметрий 14, 38, 48

Куб 102

Лист Мебиуса 323

Многогранник

- выпуклый 67, 77
- правильный 128

Многогранный угол 104, 106

Образ точки 5, 8

- фигуры 6, 9

Образующая 89

- конуса 155
- усеченного конуса 166
- цилиндра 143, 148
- Объем**
 - конуса 168, 200
 - куба 34, 37, 84, 137
 - параллелепипеда 82, 84, 103
 - правильных многогранников 136
 - пирамиды 123, 125
 - призмы 93
 - тела вращения 197, 199
 - тетраэдра 126
 - усеченного конуса 169, 201
 - усеченной пирамиды 127
 - цилиндра 153
 - шара 191, 204
- Октаэдр 130**
- Описанный**
 - конус 182
 - цилиндр 181
 - шар 182
- Ориентация 22, 238**
- Осевое сечение 4**
 - конуса 156, 158
 - цилиндра 142, 145
 - шарового сегмента 192
 - шарового сектора 192
- Основание**
 - конуса 154
 - параллелепипеда 95
 - пирамиды 109
 - призмы 85
 - усеченного конуса 165
 - усеченной пирамиды 121
 - цилиндра 142
- Ось**
 - конуса 154
 - симметрии фигуры 45, 211
 - цилиндра 143
- Отображения пространства 5, 7**
- Параллелепипед**
 - наклонный 96
 - прямой 96
 - прямоугольный 96
- Параллельный перенос 33, 49**
- Пирамида**
 - вписанная в конус 163
 - описанная около конуса 164
 - правильная 112, 114
- Плоский угол трехгранного угла 105**
- Площадь боковой поверхности**
 - конуса 155, 160
 - пирамиды 117
 - призмы 89
 - усеченного конуса 167
 - усеченной пирамиды 122
 - цилиндра 143, 147
- Площадь полной поверхности**
 - выпуклого тела 62
 - вычисление 82
 - единица 82
 - конуса 155, 161
 - куба 100
 - параллелепипеда 100
 - пирамиды 117
 - призмы 89
 - сферы 186
 - тела вращения 186
 - тетраэдра 134
 - усеченного конуса 166
 - усеченной пирамиды 122
 - цилиндра 143, 147
 - шара 186
- Поверхность**
 - коническая 155, 227
 - цилиндрическая 144, 228
 - тела вращения 138, 140, 218
- Поворот**
 - вокруг оси 38, 40, 42, 49
 - зеркальный 38, 46
- Подобие 61**
- Правильный**
 - многогранник 128, 131
 - гексаэдр 130

- додекаэдр 130
- икосаэдр 131
- октаэдр 130
- тетраэдр 130
- Преобразование**
 - обратное 11
 - пространства 8, 10, 15
- Призма**
 - вписанная в цилиндр 148
 - наклонная 86
 - описанная около цилиндра 149
 - описанная около шара 182
 - правильная 86
 - прямая 85
- Принцип Кавальери** 82
- Прообраз** 5, 8
- Радиус**
 - основания конуса 154
 - основания цилиндра 144
 - сферы 170
 - шара 169
- Равенство фигур в пространстве** 23
- Развертка боковой поверхности**
 - конуса 160
 - многогранника 73
 - усеченного конуса 166
 - цилиндра 146
- Развертка полной поверхности**
 - конуса 160
 - многогранника 73
 - усеченного конуса 166
 - цилиндра 146
- Ребро**
 - многогранника 71
 - пирамиды 109
 - трехгранного угла 104
- Свойства**
 - движений пространства 16
 - диагоналей параллелепипеда 97
 - диагонали прямоугольного параллелепипеда 97
 - объемов тел 82
 - плоских углов трехгранного угла 105
- Сечения**
 - конические 157, 235
 - конуса 156, 161
 - многогранника 92
 - цилиндра 144
 - сферы 171
 - шара 171
- Симметрия**
 - осевая 42, 44, 139
 - относительно плоскости 29
 - скользящая 33, 37
 - центральная 10, 25
- Сфера** 170
 - вписанная в многогранник 182
 - описанная около многогранника 183
- Тело вращения** 140
 - геометрическое 70
- Тетраэдр** 110, 131
 - ортоцентрический 125
- Трехгранного угла**
 - определение 70, 104
 - теорема косинусов 107, 317
 - теорема синусов 108, 317
- Уравнение**
 - поверхности 218, 230
 - сферы 174, 220
- Центр симметрии параллелепипеда** 96
 - — сферы 12
 - — фигуры 12, 212
 - — шара 12
- Цилиндр** 142
- Шар** теорема 52
- Шар** 67, 69, 169
- Шар, вписанный в двугранный угол** 183
 - — — конус 182
 - — — многогранник 182
 - — — многогранный угол 183

- — — пирамиду 18
- — — тетраэдр 182, 184
- — — цилиндр 181
- Шар, описанный около много-**
гранника 183
- — — тетраэдра 182, 184
- — — усеченного конуса 182
- — — цилиндра 181
- Шаровой**
- пояс 185, 187
- сегмент 185, 187
- сектор 185, 187
- слой 185, 187
- Элементы**
- конуса 154
- многогранника 71
- пирамиды 109
- призмы 85
- цилиндра 142
- шара 169
- шарового сегмента 185, 187
- шарового сектора 185, 187
- шарового слоя 185, 187
- Эйлера теорема 72**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА	
§ 1. Отображения пространства	5
§ 2. Преобразования пространства	8
2.1. Определение преобразования. Центральная симметрия пространства	8
2.2. Обратное преобразование	11
2.3. Композиция преобразований	12
§ 3. Движения пространства. Общие свойства движений ..	14
3.1. Определение движения. Композиция движений	14
3.2. Общие свойства движений	16
3.3. О движениях первого и второго рода в пространстве	22
3.4. О равенстве фигур в пространстве	23
3.5. Свойства центральной симметрии пространства	25
§ 4. Симметрия относительно плоскости	29
4.1. Определение симметрии относительно плоскости	29
4.2. Симметрия относительно плоскости в координатной форме.	31
4.3. Симметрия относительно плоскости — движение пространства	32
4.4. Свойства симметрии относительно плоскости	32
§ 5. Параллельный перенос. Скользящая симметрия	33
5.1. Определение параллельного переноса	33
5.2. Параллельный перенос в координатах	34
5.3. Свойства параллельного переноса	35
5.4. Скользящая симметрия	37
§ 6. Поворот вокруг оси. Осевая симметрия. Зеркальный поворот. Винтовое движение	38
6.1. Определение поворота вокруг оси.	38
6.2. Свойства поворота вокруг оси и осевой симметрии	42
6.3. Зеркальный поворот и винтовое движение	46
§ 7. Взаимосвязь различных движений пространства	48
7.1. Композиция двух симметрий относительно плоскости ..	48
7.2. Виды движений пространства	50
§ 8. Гомотетия и подобие пространства	55
8.1. Определение гомотетии пространства	55
8.2. Формулы и свойства гомотетии пространства	56

8.3. Подобие пространства. Разложение подобия в композицию гомотетии и движения	61
8.4. О подобии фигур в пространстве	63

Глава 2. МНОГОГРАННИКИ

§ 9. Понятие многогранника	66
9.1. Геометрическое тело	66
9.2. Многогранник и его элементы	71
9.3. Развертка	73
9.4. Свойства выпуклых многогранников	77
§ 10. Объемы многогранников	80
10.1. О понятии объема тела	80
10.2. Объем прямоугольного параллелепипеда	82
§ 11. Призма	84
11.1. Определение призмы. Виды призм	84
11.2. Боковая и полная поверхности призмы	89
11.3. Объем призмы	93
§ 12. Параллелепипед	95
12.1. Определение и свойства параллелепипеда	95
12.2. Объем параллелепипеда	103
§ 13. Треугольные и многогранные углы	104
13.1. Понятие о многогранном угле. Треугольный угол	104
13.2. Теорема косинусов и теорема синусов для треугольного угла	106
§ 14. Пирамида	109
14.1. Определение пирамиды и ее элементов	109
14.2. Некоторые виды пирамид	110
14.3. Правильная пирамида	112
14.4. Площади боковой и полной поверхностей пирамиды	117
14.5. Свойства параллельных сечений пирамиды	119
14.6. Усеченная пирамида	121
14.7. Объем пирамиды	122
14.8. Об объеме тетраэдра	125
14.9. Объем усеченной пирамиды	127
§ 15. Правильные многогранники	128
15.1. Определение правильного многогранника	128
15.2. Пять типов правильных многогранников	128

Глава 3. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

§ 16. Фигуры вращения	139
16.1. Поверхность вращения	139
16.2. Тело вращения	140
§ 17. Цилиндр	142

17.1. Определение цилиндра и его элементов	142
17.2. Свойства цилиндра	144
17.3. Развертка и площадь поверхности цилиндра	146
17.4. Призмы, вписанные в цилиндр и описанные около цилиндра	148
17.5. Объем цилиндра	152
§ 18. Конус	154
18.1. Определение конуса и его элементов	154
18.2. Сечения конуса	156
18.3. Касательная плоскость к конусу	158
18.4. Изображение конуса	159
18.5. Развертка и площадь поверхности конуса	159
18.6. Свойства параллельных сечений конуса	161
18.7. Вписанные в конус и описанные около конуса пирамиды	163
18.8. Усеченный конус	165
18.9. Поверхность усеченного конуса	167
18.10. Объем конуса и усеченного конуса	168
§ 19. Шар и сфера	169
19.1. Определение шара, сферы и их элементов	169
19.2. Изображение сферы	171
19.3. Уравнение сферы	174
19.4. Пересечение шара и сферы с плоскостью	175
19.5. Плоскость, касательная к сфере и шару	179
19.6. Вписанные и описанные шары и сферы	181
19.7. Площади поверхностей шара и его частей	185
19.8. Объем шара и его частей	191

ДОПОЛНЕНИЯ

1. О применении определенного интеграла для нахождения объемов тел вращения	197
1.1. Формула объема тела вращения	197
1.2. Объемы конуса, шара и его частей	200
2. О симметриях правильных многогранников	207
2.1. О самосовмещениях фигуры	207
2.2. Об элементах симметрии правильного многогранника. Двойственные правильные многогранники.	211
2.3. Группа симметрий правильного тетраэдра	212
2.4. Группа симметрий куба	214
2.5. Группа симметрий правильного икосаэдра	215
3. О поверхностях второго порядка	217
3.1. Поверхности вращения в координатах	217
3.2. Поверхности вращения второго порядка	219

3.3. Линии второго порядка как плоские сечения конической поверхности	231
4. О векторном произведении двух векторов	236
5. О различных ветвях геометрии	246
5.1. Об элементарной геометрии	247
5.2. Об аналитической геометрии	253
5.3. О дифференциальной геометрии	261
5.4. О проективной геометрии	274
5.5. О неевклидовой геометрии Лобачевского	294
5.6. О сферической геометрии	312
5.7. О топологии	317
6. Об аксиоматическом построении геометрии	332
6.1. О построении трехмерной евклидовой геометрии по Гильберту	333
6.2. Об обосновании трехмерной евклидовой геометрии по Вейлю	337
 ПРИЛОЖЕНИЯ	
1. Список основных теорем, изучаемых в 11 классе	341
2. Формулы планиметрии	345
3. Формулы стереометрии	353
 ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	 361